

Влияние параметров нелинейно-вязких элементов на моделирование характерных свойств процесса сверхпластичности

Т. А. Белякова[†], Р. А. Васин, И. А. Гончаров[‡]

[†]tanbel@mech.math.msu.su, [‡]rtif91@gmail.com

Механико-математический факультет МГУ, Ленинские горы 1, Главное здание, 119991 Москва, Россия

В работе исследуется влияние параметров одномерной модели, представляющей собой смешанное соединение трёх нелинейно-вязких элементов, на адекватное описание характерных свойств сверхпластических процессов. Проведены аналитическое отсеечение несущественных параметров и классификация полученных при численном моделировании вариантов зависимости напряжения от скорости деформаций. Определены области сигмоидальности кривой сверхпластичности в пространстве параметров нелинейно-вязких элементов.

Ключевые слова: сверхпластичность, сигмоидальная кривая, нелинейно-вязкий элемент, реологическая модель

The influence of the parameters of nonlinear viscous elements on the modelling of characteristic properties of superplasticity processes

T. A. Beliakova, R. A. Vasin, I. A. Goncharov

Department of Mechanics and Mathematics, MSU, 1 Leninskiye Gory, 119991, Moscow, Russia

In the paper a one-dimensional model with the mixed combination of three nonlinear viscous elements is considered, and the influence of the model parameters on the adequate description of the characteristic properties of the superplastic processes is investigated. Inessential parameters are excluded analytically, and the types of the stress vs strain rate dependencies, obtained by the numerical modelling, are classified. Domains in the parameter space of the nonlinear viscous elements are found where the superplastic curve is sigmoidal.

Keywords: superplasticity, sigmoidal relationship, nonlinear viscous element, reological models

1. Введение

При описании поведения материала в состоянии сверхпластичности удобным инструментом для построения корректных определяющих соотношений являются структурно-механические реологические модели, позволяющие отразить существенную скоростную чувствительность материала.

Одномерная реологическая структурно-механическая модель строится из набора параллельно и/или последовательно соединённых между собой базовых элементов с фиксированными свойствами, которые описываются небольшим числом параметров. Несмотря на кажущуюся простоту, широкий выбор базовых элементов и большое число возможных способов соединения позволяют получать модели с различными свойствами, в том числе существенно отличными от свойств

исходных базовых элементов.

Поскольку при сверхпластическом деформировании связь напряжений и скоростей деформаций достаточно сложная, нелинейная, в простейшем случае в качестве базового используется нелинейно-вязкий элемент (НВЭ), имеющий определяющее соотношение $\sigma = K \dot{\xi}^m$, где σ — напряжение, $\dot{\xi}$ — скорость деформаций, K и m — параметры элемента (константы). Как известно, характерной особенностью сверхпластического деформирования является наличие точки перегиба у логарифмической зависимости σ от $\dot{\xi}$. Возникает вопрос, можно ли смоделировать сигмоидальную кривую, используя только названные базовые элементы. Первым рассмотрел эту задачу и дал положительный ответ с помощью модели, основанной на смешанном соединении трёх НВЭ (рис.1), Бэкофен [1]. Обширное исследование структурно-механических моделей на основе упругих, вязких и иде-

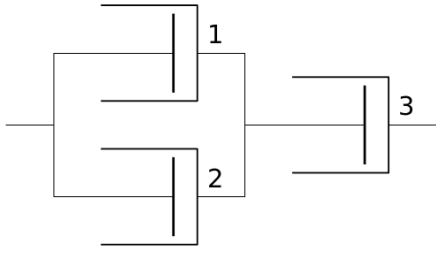


Рис. 1. Соединение трех НВЭ смешанного типа.

Fig. 1. Mixed combination of three nonlinear viscous elements.

ально-пластических элементов выполнил Смирнов [2], однако, ему не удалось получить модель, приводящую к сигмоидальной логарифмической зависимости σ от ξ . Тем не менее, он предложил известную в сверхпластичности дробно-рациональную формулу (Смирнова), которая описывает сигмоидальность экспериментальных зависимостей, но не соответствует какой-либо конкретной структурно-механической модели. Возможность аппроксимации экспериментальных кривых с точкой перегиба дробно-рациональными выражениями обсуждалась в применении к задачам ползучести в работах Шестерикова и соавторов [3].

Вопрос о моделировании сигмоидальной кривой сверхпластичности комбинацией НВЭ подробно рассматривался также в [4] и [5], где приведено несколько конкретных наборов значений параметров, при которых общая логарифмическая зависимость σ от ξ является сигмоидальной. В работе [4] с помощью численного моделирования показано, что только параллельные или только последовательные комбинации нескольких НВЭ при любых значениях параметров непригодны для описания сигмоидальной кривой. С помощью метода математической индукции данный факт может быть явно доказан для любого числа элементов [6].

Целью настоящей работы является определение для модели Бэкофена области в пространстве параметров, точкам которой отвечают сигмоидальные кривые.

2. Аналитическое исследование модели — классы кривых

Выпишем кинематические и силовые соотношения для смешанного соединения НВЭ (рис.1):

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \xi_1 + \xi_3 = \xi \quad (1)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma \quad (2)$$

Здесь ξ — общая скорость деформаций модели, σ — общее напряжение в модели, ξ_i и σ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ — соответственно, скорости деформаций и напряжения в i -том элементе.

Подставляя в первое равенство из цепочки (2) определяющие соотношения для каждого НВЭ и используя равенства (1), получим уравнение:

$$K_1 \cdot (\xi - \xi_3)^{m_1} + K_2 \cdot (\xi - \xi_3)^{m_2} = K_3 \xi^{m_3} \quad (3)$$

которое задаёт неявное выражение ξ_3 через ξ и параметры модели K_i и m_i .

Из второго равенства цепочки (2) очевидно следует

$$\log \sigma = \log \sigma_3 = \log K_3 + m_3 \log \xi_3 \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) полностью описывают зависимость $\log \sigma$ от $\log \xi$ при известных значениях K_i , m_i , то есть являются определяющими соотношениями модели.

Для их анализа удобно произвести следующую нормировку. Введём некую опорную точку $(\bar{\xi}, \bar{\sigma})$. В этой точке выполняются основные уравнения модели (1), (2): $\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}$, $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}$.

Введём далее безразмерные величины $\alpha = \bar{\xi}_3 / \bar{\xi}$, $\beta = \bar{\sigma}_2 / \bar{\sigma}$ со значениями из интервала (0,1). Тогда получим $\bar{\xi}_1 = (1-\alpha)\bar{\xi}$ и $\bar{\sigma}_1 = (1-\beta)\bar{\sigma}$. Наконец, внося данные выражения в определяющие соотношения для элементов, выразим коэффициенты K_i через введённые величины:

$$K_1 = \frac{(1-\beta)\bar{\sigma}}{[(1-\alpha)\bar{\xi}]^{m_1}}, \quad K_2 = \frac{\beta\bar{\sigma}}{[(1-\alpha)\bar{\xi}]^{m_2}}, \quad K_3 = \frac{\bar{\sigma}}{[\alpha\bar{\xi}]^{m_3}} \quad (5)$$

Заменим теперь в уравнении (3) коэффициенты K_i на их выражения (5):

$$\frac{1-\beta}{(1-\alpha)^{m_1}} (\bar{\xi} - \bar{\xi}_3)^{m_1} + \frac{\beta}{(1-\alpha)^{m_2}} (\bar{\xi} - \bar{\xi}_3)^{m_2} = \frac{1}{\alpha^{m_3}} \bar{\xi}_3^{m_3}$$

где $\bar{\xi}_3 = \xi_3 / \bar{\xi}$ и $\bar{\xi} = \xi / \bar{\xi}$ — нормированные значения скоростей деформаций. Итак, получена неявная зависимость $\bar{\xi}_3$ от $\bar{\xi}$, α , β и m_i .

Подстановка K_3 в уравнение (4) даёт: $\log \sigma = \log \bar{\sigma} + m_3 \cdot (\log \bar{\xi}_3 - \log \alpha)$ или при фиксированных α , β , m_i

$$\log \sigma = \log \bar{\sigma} + \Phi(\bar{\xi}_3(\bar{\xi})) = \log \bar{\sigma} + \tilde{\Phi}(\log \xi - \log \bar{\xi})$$

где Φ , $\tilde{\Phi}$ — некоторые сложные, но фиксированные при заданном наборе указанных параметров функции.

Отсюда очевидно, что параметры $\bar{\xi}$ и $\bar{\sigma}$ являются «параметрами сдвига». На геометрическом языке изменение этих параметров равносильно параллельному переносу кривой, представляющей зависимость $\log \sigma$ от $\log \xi$. Поскольку интерес представляет только наличие точки перегиба, а не её конкретное положение, можно вместо индивидуальных кривых изучать классы кривых, совпадающих с точностью до параллельного переноса. С точки зрения численного расчёта, выбор иных параметров $\bar{\xi}$ и $\bar{\sigma}$ эквивалентен рассмотрению кривой на другом интервале скоростей деформаций.

3. Аналитическое исследование модели — связь параметров α и β

Заметим, что в случае $m_1 = m_2$ параллельно соединённые элементы эквивалентны одному элементу с тем же m и суммарным K ; модель вырождается в последовательное соединение двух элементов, которое не даёт сигмоидальности.

Без ограничения общности будем считать, что $m_1 < m_2$. Вернёмся теперь к пространствам параметров $(\bar{\sigma}, \bar{\xi}, \alpha)$,

β) и (K_1, K_2, K_3) . В первом из них каждый класс кривых соответствует плоскости, заданной парой параметров α и β . Во втором, трехмерном пространстве данным плоскостям соответствуют некие, вообще говоря двумерные поверхности; из общих соображений размерности возникает предположение, что они должны образовывать однопараметрическое семейство. Отсюда в свою очередь следует, что задающие поверхность параметры α и β должны быть связаны между собой.

Чтобы получить уравнение искомой связи, вернемся к уравнениям (5), задающим отображение точек первого пространства в точки второго. В пространстве (K_1, K_2, K_3) соотношения (5) можно рассматривать как параметрическое задание изучаемых поверхностей ($\hat{\sigma}$ и $\hat{\xi}$ при этом играют роль координат на поверхности при фиксированных α и β). Перейдем от данного параметрического задания к явному виду поверхностей.

Выразим $\hat{\sigma}$ из первого уравнения в (5) и подставим полученное выражение во второе уравнение в (5). После небольшого упрощения оно примет вид

$$K_2 = \frac{K_1 \beta}{1 - \beta} [(1 - \alpha) \hat{\xi}]^{m_1 - m_2}$$

Поскольку принято $m_1 \neq m_2$, данное уравнение разрешается относительно $\hat{\xi}$. Подставим теперь выражение для $\hat{\xi}$ и $\hat{\sigma}$ в последнее равенство из (5) и приведем подобные в получившейся степенной функции. Окончательно получим

$$K_3 = K_1^{\frac{m_3 - m_2}{m_1 - m_2}} K_2^{\frac{m_1 - m_3}{m_1 - m_2}} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{m_3} (1 - \beta)^{\frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_2}} \beta^{\frac{m_3 - m_1}{m_1 - m_2}},$$

что при фиксированных α и β представляет собой искомый явный вид функции $K_3 = K_3(K_1, K_2)$.

Очевидно, что для различных наборов α и β заданные таким образом поверхности либо не имеют общих точек в интересующей нас области $K_1, K_2 > 0$, либо полностью совпадают. Последнее происходит тогда и только тогда, когда значения параметров α и β являются решениями уравнения

$$\tilde{c} = \alpha^{m_3(m_2 - m_1)} (1 - \alpha)^{m_3(m_1 - m_2)} \beta^{m_3 - m_1} (1 - \beta)^{m_2 - m_3} \quad (6)$$

где $\tilde{c} = \text{const}$ по сути является тем единственным параметром, который определяет поверхности в пространстве K_1 (в том смысле, что каждому положительному значению данного параметра соответствует одна и только одна поверхность).

Заметим также, что записанное выражение (6) явно разрешается относительно α :

$$\alpha = \frac{\tilde{\beta}^m}{\tilde{\beta}^m + \tilde{c}^m}, \tilde{\beta} = \beta^{m_3 - m_1} (1 - \beta)^{m_2 - m_3}, m = \frac{1}{m_3(m_1 - m_2)} \quad (7)$$

Следовательно, для любого класса (то есть для каждого фиксированного $\tilde{c} > 0$) и любого β существует и однозначно определено значение α , при котором поверхность, соответствующая этим α и β , совпадает с заданной.

Геометрический смысл β в пределах класса легко выясняется: параметры $(\hat{\xi}, \hat{\sigma})$ задают точку, через которую обязан проходить график логарифмической зависимости σ от ξ , а β указывает, какая именно точка кривой

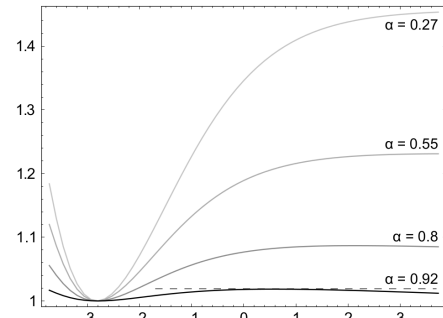


Рис. 2. Качественное изменение логарифмической зависимости σ от ξ , соответствующее изменению α при фиксированных прочих параметрах. Показаны первые производные кривых, сдвинутые по оси $\log \xi$ до совпадения минимумов (пунктиром выделен второй экстремум одной из них).

Fig. 2. The qualitative change in the logarithmic dependence σ on ξ ; the parameter α varies while the other parameters are fixed. The first derivatives are shown; the curves are moved in order to superpose their minimums. The second extremum of one of the curves is marked with the dotted line.

совпадает с данной точкой. Если константа \tilde{c} и точка $(\hat{\xi}, \hat{\sigma})$ фиксированы, а β меняется (значения α при этом вычисляются по формуле (7)), то соответствующие данным значениям параметров зависимости $\log \sigma$ от $\log \xi$ отличаются на сдвиг вдоль полученной кривой. Таким образом, если рассматривается только общая форма кривой сверхпластичности, параметр β можно считать эквивалентным параметрам $\hat{\sigma}$ и $\hat{\xi}$ в том смысле, что изменение его при фиксированном \tilde{c} не меняет эту форму.

Наконец, параметр α отвечает непосредственно за форму логарифмической зависимости σ от ξ . Проведенные исследования показали, что малые изменения этого параметра для сигмоидальных кривых меняют лишь степень выраженности перегиба кривой, но при больших изменениях α возможно и качественное изменение формы логарифмической зависимости σ от ξ (рис.2).

4. Результаты численного моделирования

Численное моделирование различных форм кривых производилось при фиксированных параметрах $\hat{\xi} = \hat{\sigma} = 1$ и $\beta = 0.5$. По параметрам m_i и α производился перебор, причём по m_i рассматривалось 5, 10 и 20 шагов, в каждом случае брались различные значения α . Последние, в свою очередь, выбирались неравномерно, с увеличением частоты по краям интервала (0,1), поскольку, как видно из соотношения (6), при $\alpha \rightarrow 0$ или $\alpha \rightarrow 1$ (в зависимости от конкретных значений m_i) происходит стремление константы класса \tilde{c} к вертикальной асимптоте.

Определение типа для каждой кривой производилось методом поиска нулей второй производной с одновременным анализом первой производной — в целях дополнительного контроля и для борьбы с вычислительными погрешностями. Интервал скоростей деформаций, на котором производилось исследование сигмоидальности — $\log_{10} \dot{\xi} \in [-7, 7]$. Данный отрезок су-

щественно превышает тот, в котором на практике наблюдается сверхпластичность, однако это необходимо, поскольку рассматриваются классы кривых (то есть уже сдвинутые кривые).

Значения производных вычислялись по симметричным формулам из значений функции в четырёх точках, всего 105 значений производных из 108 расчётных точек (три дополнительные для определения производной на краях интервала). Значения ξ_3 получались из неявной зависимости (3) комбинированным методом, сочетающим метод деления пополам для построения начального приближения и метод Ньютона для быстрого поиска нуля в его окрестности.

В результате численного моделирования установлено, что классы кривых можно условно разделить на четыре типа. Производные функций из классов первого типа, условно названного «Good», имеют единственный максимум на отрезке рассмотрения. Это соответствует «правильному» перегибу самой кривой, то есть искомому случаю сигмоидальности. Второй тип «Bad» содержит классы, производные функций из которых имеют единственный минимум на отрезке рассмотрения. Это также соответствует наличию перегиба на кривой, однако его направление обратно требуемому. Тип «Multiextrema» содержит классы, кривые из которых имеют два перегиба в области рассмотрения. Кривых, имеющих более двух перегибов, в процессе расчётов не обнаружено. Наконец, последним типом «Unknown» отмечены классы, кривые из которых не содержат перегибов на рассматриваемом интервале изменения параметра ξ (производные монотонны, как в случае только параллельной или только последовательной комбинации).

В табл.1 содержится статистика по типам. Для каждого из типов приведено количество классов кривых, отнесённых к данному типу, и его доля в процентах от общего числа рассмотренных классов. Типы отсортированы по убыванию частоты встречаемости.

Далее полученные результаты были обобщены по значениям m_1 , то есть для каждого набора последних были найдены все типы, встречающиеся при данных m_1 и любом значении α из рассматривавшихся. Для каждой комбинации типов было подсчитано количество наборов m_1 , для которых при расчётах встретились именно эти типы. С точки зрения формального ответа на вопрос о наличии сигмоидальности, случаи «Bad» и «Multiextrema» неразличимы (соответствуют ответу «нет»). Поэтому из результатов расчётов были собраны конечные ответы: «Good» заменён на знак "+", «Unknown»

заменён знаком "?", а типы «Bad» и «Multiextrema» отождествлены под единым знаком "-". Полученные данные представлены в табл.2.

Заметим, что не следует воспринимать приведённую классификацию как абсолютно точную. В силу того, что численный анализ вынужденно ограничивается фиксированным отрезком для значений параметра ξ , реальный тип кривой может отличаться от найденного в случае, если существуют экстремумы производной, расположенные вне рассматриваемого отрезка. Поэтому кривая, отнесённая к типу «Unknown», может в действительности относиться к любому из остальных типов, а кривые из типов «Good» и «Bad» могут на самом деле принадлежать типу «Multiextrema».

Для более полной классификации пригодно следующее соображение. При неограниченном возрастании или убывании $\log \xi$ график зависимости напряжения от скорости деформаций, изображённый в логарифмических координатах, асимптотически стремится к прямой [4,5]. Используя этот факт, можно динамически расширять отрезок рассмотрения до достижения продолжительного участка крайне малых значений второй производной. После этого можно будет с высокой степенью уверенности утверждать, что все экстремумы первой производной (если они есть) должны содержаться внутри полученного отрезка. К сожалению, достоверное установление того факта, что кривая после определённой точки устойчиво стремится к асимптоте, сопряжено с определёнными техническими и вычислительными трудностями. Поэтому в данной работе авторы ограничились рассмотрением кривых на фиксированном отрезке.

Наконец, приведём визуализацию полученных результатов, наиболее ярко демонстрирующую все обнаруженные эффекты (рис.3). Каждое изображение содержит «срез» пространства параметров m_1 плоскостью $m_3 = \text{const}$. Метки соответствуют наборам m_1 , по оси абсцисс отложены значения m_1 , по оси ординат — m_2 . Линией показана диагональ области $m_1 = m_2$, все результаты располагаются над ней, поскольку, как было сказано ранее, при расчётах из соображений симметрии рассматривался только случай $m_1 < m_2$.

Каждая метка кодирует два параметра комбинации

Таблица 1. Общая статистика по встречаемости типов кривых
Table 1. The general statistics of the occurrences of the curves types

Тип	Количество (классов кривых)	Процент
Type	Number of the curves types	Per cent
Multiextrema	26807	33.16%
Good	26208	32.42%
Bad	20489	25.34%
Unknown	7346	9.08%
Всего (Totally types) 80850 классов		

Таблица 2. Статистика по комбинациям типов с отождествлением случаев «Bad» и «Multiextrema»

Table 2. The general statistics of the type combinations with the merging of the cases «Bad» and «Multiextrema»

Набор	Количество (наборов m_1)	Процент
Type set	Number of the m_1 sets	Per cent
—	1428	37.58%
—, ?	839	22.08%
+	740	19.47%
+, ?	504	13.26%
+, —	161	4.24%
+, —, ?	124	3.263%
?	4	0.11%
Всего (Totally sets) 3800 наборов		

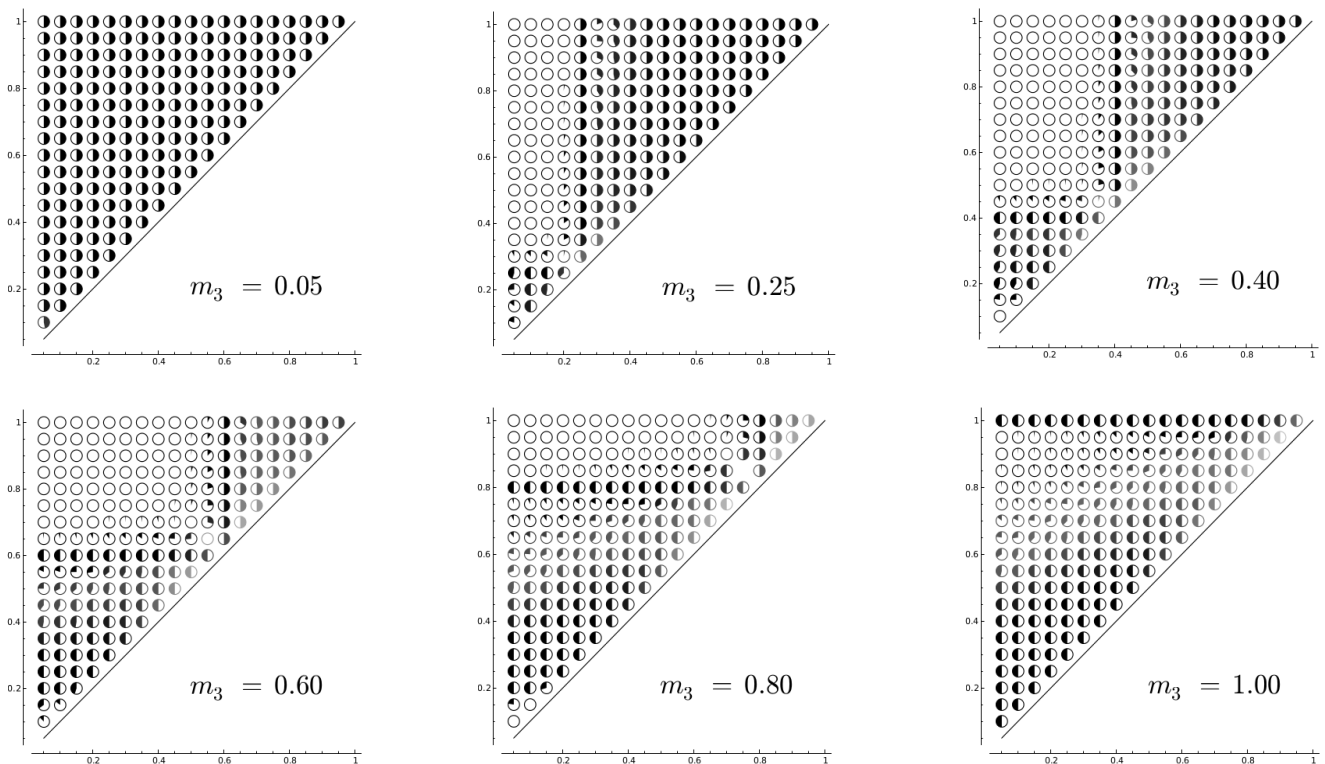


Рис. 3. Визуализация основных результатов расчёта. Представлены наиболее показательные «срезы».

Fig. 3. The visualisation of the main computational results. The most significant sections are shown.

типов, встретившихся для данного набора m_i . Проценту ответов типа «Unknown» соответствует бледность символа — от полностью чёрного для наборов, не содержащих этого типа, через серый к полностью белому в случаях, когда все ответы были данного типа (то есть для такого набора m_i зависимость монотонна всегда). Соотношение ответов типа «Good», «Bad» и «Multiextrema» (среди оставшихся после убирания типа «Unknown») кодируется закрашиванием метки. Пустая метка соответствует случаю, когда все кривые для данных m_i имеют тип «Multiextrema». Возникновение закрашенного сектора слева от вертикали обозначает присутствие типа «Bad», справа от вертикали — типа «Good». Величина отклонения пропорциональна соотношению количества ответов («Bad»/«Multiextrema» или «Good»/«Multiextrema») вплоть до полукруга, который обозначает ситуации «только «Bad»» (закрашен левый полукруг) или «только «Good»» (закрашен правый).

5. Выводы и заключение

Анализ представленных изображений позволяет выделить три основные зоны. Первая зона соответствует $m_1 \geq m_3$ (а в общем виде, из соображений симметрии, $\min(m_1, m_2) \geq m_3$) и является зоной подавляющего преобладания кривых типа «Good». Помимо них в данной зоне иногда встречаются ответы типа «Multiextrema»; тип «Bad» полностью отсутствует. При m_1 меньшем, но приблизительно равном m_3 , и $m_2 > m_3$ наблюдается смешение кривых типов «Good» и «Multiextrema» с увеличением влияния последнего по мере удаления m_1 и m_2 от значения m_3 .

В зоне $m_1 \ll m_3$, напротив, полностью отсутствует тип «Good». При этом в случае $m_1 \ll m_2$ единственным встречающимся является тип «Multiextrema». В случае же $m_1 \approx m_2$ преобладает тип «Bad», за исключением случая $m_1 \approx m_2 \approx 0$, в котором наблюдается малый очаг (примерно 1—2 метки) с преобладанием типа «Multiextrema».

Кривые типа «Unknown» преимущественно встречаются на стыке зон. Скорее всего, это связано с тем, что именно в этом месте поведение модели нестабильно и сильно зависит от константы α , тогда как в глубине зон оно жёстко фиксировано для данного набора m_i . Примечательно также, что все 4 полностью белые метки (наборы m_i , для которых получены только ответы типа «Unknown») отвечают симметричной ситуации $m_1 + 0.05 = m_2 - 0.05 = m_3$. Вероятно, вклады параллельных элементов в некотором смысле взаимнокомпенсируются, и поведение кривой стремится к поведению в тривиальной ситуации $m_1 = m_2 = m_3$, которая очевидно эквивалентна одному НВЭ и на плоскости $(\log \xi, \log \sigma)$ соответствует строгой прямой линии.

Таким образом, полным ответом на поставленный в начале работы вопрос об области формальной сигмоидальности следует считать утверждение: «Кривые всегда сигмоидальны при $\min(m_1, m_2) \gg m_3$ или $\min(m_1, m_2) = m_3$, и сигмоидальны для большинства значений α при $\min(m_1, m_2)$, близком к, но не равном m_3 ».

Наконец, стоит отметить чётко прослеживающуюся при $m_3 > 0.5$ линию, соответствующую значениям $m_1 < m_2 = m_3$ и целиком состоящую из меток типа «Bad». Она примечательна тем, что при $m_1 \ll m_3$ линию окружает область преобладания ответов типа «Multiextrema». Локаль-

ное поведение кривых вблизи этой линии (то есть при таких m_1 и при $m_2 \rightarrow m_3$) не устанавливается из полученных результатов и нуждается в дополнительном изучении.

Заметим в заключение, что одним из способов улучшения результата может быть изменение критерия оценки. В действительности практический интерес для моделирования эксперимента представляет не вся кривая, а лишь её поведение в окрестности максимума производной (то есть в окрестности сигмоидального участка). Поэтому можно определять степень пригодности найденной кривой для моделирования из сравнения этой кривой с универсальной кривой сверхпластичности, описывающей в некотором смысле «стандартное» поведение сверхпластического материала [4]. Такой подход может быть более оправдан для практических применений исследуемой модели. В настоящей работе, однако, авторы задавались целью определить область, соответствующую именно формальному математическому описанию сигмоидальности. Поэтому от сравнения с универсальной кривой (имеющей, в общем-то, сугубо эмпирический характер) при решении поставленной задачи было решено отказаться.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00401).

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant № 13-01-00401).

Литература/References

1. S. W. Zehr, W. A. Backofen. Trans. Am. Soc. Metals. **61**, 300—313 (1968).
2. O. M. Smirnov. Metal working with pressure in the superplastic state. Moscow. Mashinostroenie (1979) 189 p. (in Russian) [О. М. Смирнов. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. М. Машиностроение. (1979) 184 с.]
3. S. A. Shesterikov, G. P. Melnikov, A. L. Arshakuni. Strength of Materials. **6**, 77—81 (1980).
4. R. A. Vasin, F. U. Enikeev, M. I. Mazurski, O. S. Munirova. Journal of materials science. **35**, 2455—2466 (2000).
5. K. A. Padmanabhan, R. A. Vasin, F. U. Enikeev. Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics, Berlin-Heidelberg. Springer. Verlag (2001) 363 p.
6. T. A. Beliakova, I. A. Goncharov. In: Lomonosovskie chteniya, Book of Abstracts, Moscow, MSU (2014), с. 29. (in Russian) [Т. А. Белякова, И. А. Гончаров. Научная конференция «Ломоносовские чтения». Тезисы докладов. М. МГУ. (2014) с. 29.]