

Отражение упруго-пластических волн от жестко-закрепленного конца параллелепипеда

Каримбаев Т. Д.¹, Мамаев Ш.^{2†}

[†]sch_mamaev@mail.ru

¹Центральный институт авиационного моторостроения, ул. Авиамоторная 2, 111116, Москва
²Алматинская академия экономики и статистики, ул. Жандосова 59, г. Алматы, Республика Казахстан

Методом бихарактеристик численно решена в трехмерной постановке упруго-пластическая задача о продольном ударе по параллелепипеду, по одному концу которого производится удар, а другой конец жестко закреплен. Исследуется эффект взаимного влияния отраженных от закрепленной, боковой границы волн напряжений и динамических возмущений на напряженно-деформированное состояние в жестко-закрепленном торце.

Ключевые слова: метод бихарактеристик, продольный удар, упругопластическая волна, волна разгрузки.

Reflection of elastic-plastic waves from rigidly fixed end-parallelepiped

T. D. Karimbayev¹, Sh. Mamayev²

¹Central Institute of Aviation Motors (CIAM), Aviamotornaya st. 2, 111116, Moscow
²Almaty Academy of Economics and Statistics, Zhandosova st. 59, Almaty, Republic of Kazakhstan

The problem of elastic-plastic deforming of the parallelepiped, one end of which is produced hit, and the other end hardily fixed is numerically solved by bicharacteristics technique. The mutual influence of stress waves reflected from fixed, lateral border and dynamic disturbances of the stress-strain state are researched.

Keywords: method bicharacteristics, longitudinal kick, elastic-plastic wave, unloading wave.

Проблема ударного воздействия стержня с преградой имеет важное прикладное значение, связанное с созданием эффективных поражающих и защитных средств. Решение этой проблемы требует расчет упругих и упругопластических волновых процессов в стержне и мишени с целью оценки их прочности. Исследованию особенностей распространения возмущений в телах конечных размеров в трехмерной постановке посвящено небольшое число работ. Ниже приведены некоторые из этих работ.

В работе [1] рассмотрена задача динамического изгиба жестко закрепленной по концам балки. В [2,3] численно исследован процесс соударения и отскока ударников в форме прямоугольного параллелепипеда от абсолютно жесткой преграды. В [4] методом дробных шагов решена задача об определении трехмерного напряженно-деформированного состояния упругопластического стержня, к торцу которого мгновенно приложена осевая скорость перемещения, независимая от времени. В [5] рассмотрены трехмерные задачи об импульсном нагружении монолитных и двухслойных деформируемых плит, а также об ударе под углом жестким шаром по деформируемой преграде. В [6] методом характеристических поверхностей рассмотрена задача о поперечном ударе по толстой призматической оболочке. В [7] методом бихарактеристик рассмотрены два примера о динамическом изгибе

прямоугольного ортотропного параллелепипеда с одним закрепленным концом. В [8, 9] улучшена устойчивость разностной схемы и дано развитие метода бихарактеристик к упругопластическим задачам. Рассмотрена упругая и упругопластическая задача о продольном ударе по прямоугольному параллелепипеду.

В данной работе исследуется влияние закрепленного конца параллелепипеда, размеров его поперечного сечения, на напряженно-деформированное состояние в жестко-закрепленном торце.

Основные уравнения. Процесс распространения динамических возмущений в изотропной упругопластической среде описывается системой полулинейных уравнений в частных производных гиперболического типа

$$\begin{cases} \dot{v}_\alpha - \sigma_{\alpha i, i} = 0, \\ \dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \lambda v_{i, i} \delta_{\alpha\beta} - \mu(v_{\alpha, \beta} + v_{\beta, \alpha}) = \Phi_{\alpha\beta}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь λ , μ - постоянные Ламе, запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей переменной, точка над переменной означает дифференцирование по времени t , $\delta_{\alpha\beta}$ - символы Кронекера. По повторяющимся латинским индексам производится суммирование от 1 до 3. Безразмерные компоненты вектора скорости частиц v_α , тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$,

Таблица 1

Экспериментальная зависимость напряжений от деформаций

$\epsilon_i \cdot 10^4$	$\sigma_i / 9.8$ МПа	$(\sigma_i / \rho c_1^2)$ 10^4	$\epsilon_i \cdot 10^4$	$\sigma_i / 9.8$ МПа	$(\sigma_i / \rho c_1^2)$ 10^4
0	0	0	19	26.5	9.8429
4	8.00	2.9714	20	27.0	10.0286
6	12.00	4.4572	21	27.5	10.2143
8	16.00	5.9429	22	28.0	10.4000
10	20.00	7.4286	24	28.4	10.5486
11	20.75	7.7072	26	28.8	10.6972
12	21.50	7.9857	28	29.2	10.8458
13	22.25	8.2643	30	29.6	10.9943
14	23.00	8.5429	32	30.0	11.1429
15	23.75	8.8215	46	32.0	11.8858
16	24.50	9.1000	72	34.0	12.6286
17	25.25	9.3786	143	36.0	13.3715
18	26.00	9.6572	3600	74.0	27.4858

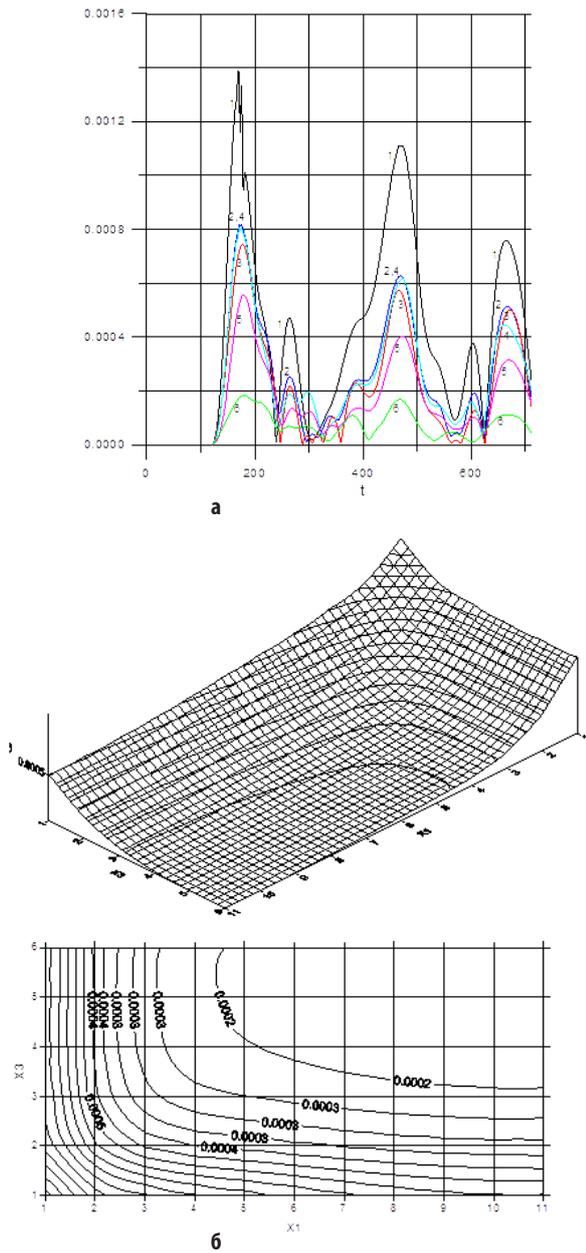


Рис. 1. (а) Осциллограммы интенсивности напряжения σ_i в характерных точках жестко-закрепленного конца 1(0,30h₂,0), 2(0,30h₂,h₃), 3(0,30h₂,5h₃), 4(h₁,30h₂,0), 5(h₁,30h₂,h₃), 6(5h₁,30h₂,5h₃). (б) Распределение интенсивности напряжения σ_i в жестко-закрепленном конце в момент времени $t=180$ т.

время t и декартовы координаты x_α определяются через соответствующие размерные величины:

$$x_\alpha = \frac{\overline{x_\alpha}}{l}, \quad t = \frac{\overline{t \cdot c_1}}{l}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\overline{\sigma_{\alpha\beta}}}{\rho c_1^2}, \quad (2)$$

$$v_\alpha = \frac{\overline{v_\alpha}}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

где черта над переменной означает размерную величину, l -характерная длина, c_1 -скорость распространения продольной волны, ρ -плотность среды. $\Phi_{\alpha\beta}$ — некоторая функция, связанная со скоростью неупругой части

деформации, которая представляется в виде

$$\Phi_{\alpha\beta} = -(\lambda \cdot F_{ii} \cdot \delta_{\alpha\beta} + 2\mu F_{\alpha\beta}) \quad (3)$$

где $F_{\alpha\beta}$ - скорость неупругой части деформации

$$F_{\alpha\beta}(\sigma_i, \chi_i) = \begin{cases} 0, & \dot{\sigma}_i \leq 0 \\ 3(1/E_k - 1/E)\dot{\sigma}_i S_{\alpha\beta} / (2\sigma_i), & \dot{\sigma}_i > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $S_{\alpha\beta}$ — компоненты дивергента напряжений, σ_i — интенсивность напряжений, E -модуль упругости, $E_k = d\sigma/d\epsilon$ — касательный модуль к кривой деформирования.

Постановка задачи. Рассматривается задача о продольном ударе по телу в форме прямоугольного параллелепипеда $\{0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < c\}$. Тело в начальный момент времени t находится в состоянии покоя

$$v_i = 0, \sigma_{ij} = 0, (i, j = 1, 2, 3) \text{ при } t=0 \quad (5)$$

В любой другой момент времени $t > 0$ на границе действует равномерно распределенная по торцу $x_2=0$ нормальная к ней растягивающая нагрузка, изменяющаяся во времени по закону непрерывно дифференцируемой функции $f(t)$, которая в начале монотонно возрастает до максимального значения $f(t_0)$, а затем монотонно убывает

$$\sigma_{22} = f(t), \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0 \text{ при } x=0 \quad (6)$$

Торец $x_2=b$ параллелепипеда жестко закреплен, т. е.

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0 \text{ при } x_2=b \quad (7)$$

Остальные грани параллелепипеда свободны от каких — либо воздействий, т. е.

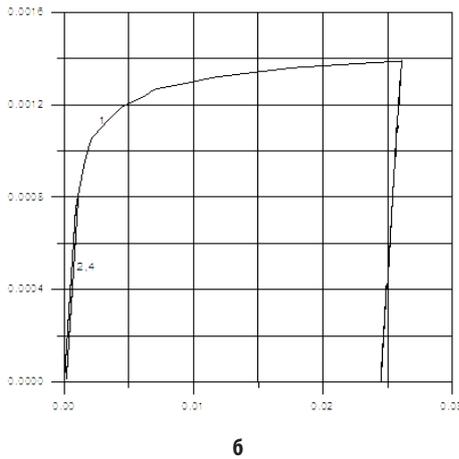
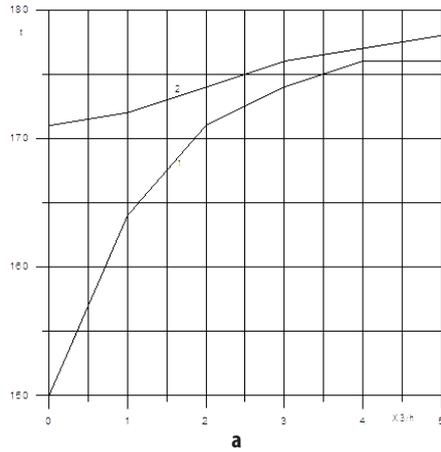


Рис. 2. (а) Волновая картина для точек линии $(x_1=0, x_2=30h_2)$.
(б) Зависимость (σ, ϵ) в характерных точках $1(0,30h_2,0)$, $2(0,30h_2,h_3)$, $4(h_1,30h_2,0)$ жестко закрепленного конца.

$$\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0, \text{ при } x_1=0 \text{ и } x_1=a \quad (8)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \text{ при } x_3=0 \text{ и } x_3=a \quad (9)$$

Необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние в жестко-закрепленном торце при $t>0$.

Задача сводится к интегрированию системы уравнений (1) при нулевых начальных (5) и граничных (7) — (9) условиях.

В расчетах, принято

$$f(t) = \begin{cases} A[1 - \cos(2\pi t / T)], & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases} \quad (11)$$

$A=0.00015$ — постоянный множитель, $T=80\tau$ — период действия нагрузки, $\sigma_{22\max}(t=40\tau)=0.0003$. Характеристики материала приведены в таб.1. Задача решалась на сетке $21 \times 31 \times 11$. Шаги по пространственным переменным и времени приняты следующими — $h_1=h_2=h_3=0.05$, $\tau=0.0125$.

На рис.1а приведены осциллограммы интенсивности напряжения σ_i для характерных точек закрепленного конца 1 $(0,30h_2,0)$, 2 $(0,30h_2, h_3)$, 3 $(0,30h_2,5h_3)$, 4 $(h_1,30h_2,0)$,

5 $(h_1,30h_2, h_3)$, 6 $(5h_1,30h_2,5h_3)$. Из сравнения кривых 1–6 видно, что наибольшее значение интенсивности напряжения σ_i будет достигаться в вершине 1 $(0,30h_2,0)$ параллелепипеда и в точках ребра. Из кривых 1, 2, 4 видно, что уровни интенсивности напряжений в этих точках превышают значение, равное пределу упругости (0.00074), что свидетельствует о появлении пластических деформаций. Из осциллограммы σ_i видно, что интенсивность напряжения имеет несколько локальных убывающих по уровню экстремумов. 1-ый локальный экстремум достигается в момент времени $t=170\tau$ ($\sigma_i=0.000139$), 2-ой при $t=470\tau$ ($\sigma_i=0.000115$), 3-ий при $t=660\tau$ ($\sigma_i=0.000075$). В рассматриваемом случае вторичные пластические деформации не появляются, т.к. уровни 2-ого, 3-его локального экстремума не превышают уровень 1-ого локального экстремума.

На рис.1б представлено распределение интенсивности напряжений $\sigma_i(x_2, x_3)$ в жестко закрепленном торце $x_2=30h_2$ в момент времени $t=180\tau$. Из которого видна концентрация напряжений в угловой точке и в точках ребер.

На рис.2а на характеристической плоскости приведены формы изменения области пластических деформаций во времени t и в направлении оси x_3 вдоль ребра $(x_1=0, x_2=30h_2)$ параллелепипеда. Линия 1 — соответствует переднему фронту пластической волны, а линия 2 — волнам разгрузки. Из кривой 1 видно, что пластическое деформирование начинается с угловой точки 1 $(0, 30h_2, 0)$ параллелепипеда и распространяется вдоль ребра по направлению оси x_3 . Процесс разгрузки также начинается с угловой точки 1 $(0, 30h_2, 0)$ параллелепипеда и с возрастанием времени волна разгрузки движется вдоль ребра $(x_1=0, x_2=30h_2)$ в направлении оси x_3 последовательно разгружая следующие точки. В угловой точке 1 $(0, 30h_2, 0)$ параллелепипеда уровни напряжений большие по сравнению с уровнями напряжений в других точках жестко-закрепленного торца. Следует отметить, что только близлежащие к угловой точке точки ребра деформируются пластически; всё остальное вокруг, в том числе, внутренние точки этого торца деформируются упруго. Пластические области вдоль ребер в направлении оси x_3 доходит до середины сечения $x_3=5h_3$, а в направлении оси x_1 до $x_1=h_1$, в направлении x_2 до $x_2=29h_2$. Это связано с тем, что в направлении оси x_3 параллелепипед имеет наименьшую ширину, т.е. с формой и размерами поперечного сечения. На рис.2б приведена зависимость интенсивностей напряжений от интенсивности деформаций в угловой 1 $(0,30h_2,0)$ и двух соседних 2 $(0,30h_2, h_3)$, 4 $(h_1,30h_2,0)$ точках жестко закрепленного конца. Из которых видно, указанные точки деформируются пластически с течением времени в указанных точках происходит разгрузка, вторичные пластические деформации не наблюдается.

Вывод

С отражением упругой волны от жестко закрепленного торца в угловой точке торца появляются пластические деформации, которые развиваются в направлении

ребер. Со временем волна разгрузки также исходящая от угловой точки жестко закрепленного торца снижает напряжение до уровня упругих напряжений.

Литература

1. V.G. Bazhenov, A.I. Kibetz, A.I. Sadyrin. Applied Problems of Strength and Plasticity. 34, 14 (1986). (in Russian) [Б.Г. Баженов, А.И. Кибец, А.И. Садырин. Прикладные проблемы прочности и пластичности. 34, 14 (1986).]
2. A.V. Kiselev. Vestnik MGU. Ser. mathematics and mechanics. 4, 51 (1985). (in Russian) [А.В. Киселев. Вестник МГУ. Сер. математика, механика. 4, 51 (1985).]
3. E.I. Andriankin, V.A. Andruschenko, N.N. Choline. Zh MF. 78 (11), 1711, (1988). (in Russian) [Э.И. Андрианкин, В.А. Андрущенко, Н.Н. Холин. ЖВМ и МФ. 78 (11), 1711 (1988).]
4. P.A. Steblenko. Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity. Materials of XI All-Union Conference. Novosibirsk. (1990) 212p. (in Russian) [П.А. Стебленко. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы XI Всесоюзной конференции. Новосибирск. (1990) 212 с.]
5. I.B. Petrov, A.G. Tormasov, A.S. Kholodov. Zh. MF. 30 (8), 1237 (1990). (in Russian) [И.Б. Петров, А.Г. Тормасов, А.С. Холодов. ЖВМ и МФ. 30 (8), 1237 (1990).]
6. G.G. Boulichev. Applied aspects of the analysis of distributed systems. USSR Academy of Sciences. Institute of Physical and Technical Problems. Moscow. (1990) 41 p. [Г.Г. Булычев. Прикладные аспекты анализа распределенных систем. АН СССР. Институт физико-технических проблем. Москва. (1990) 41 с.]
7. G.T. Tarabin. Izvestia USSR Academy of Sciences. MTT. 3, 83, (1982). (in Russian) [Г.Т. Тарабин. Изв. АН СССР. МТТ. 2, 83 (1982).]
8. Sh. Mamayev. Izvestia of the Ministry of Education and Science, National Academy of Sciences of Kazakhstan. Series of Physics and Mathematics. 5, 65 (2000). (in Russian) [Ш. Мамаев. Известия МОН РК, НАН РК. Серия физ.-мат. 5, 65 (2000).]
9. Sh. Mamayev. Izvestia of the Ministry of Education and Science, National Academy of Sciences of Kazakhstan. Series of Physics and Mathematics. 1, 32 (1995). (in Russian) [Ш. Мамаев, Т.Д. Каримбаев. Механика и моделирование процессов технологии. 1, 32 (1995).]
10. G. Kolski. Stress waves in solids. M.:IL. (1955) 188 p. (in Russian) [Г. Кольский. Волны напряжения в твердых телах. М.:Ил. (1955) 188 с.]