

Воздействие жесткого элемента на свободную поверхность упругого материала

Бубенчиков М.А., Потехаев А.И.[†], Бубенчиков А.М., Малоземов А.В.

[†]potekaev@spti.tsu.ru

Сибирский физико-технический институт, пл. Новособорная 1, 634050, Томск

В работе представлен пример простейшей математической технологии по определению предельной деформации свободной поверхности упругого тела при его контактном взаимодействии с абсолютно недеформируемым элементом. Значительное внимание в работе уделяется расчету положения свободной поверхности. Поскольку использована модель несжимаемой упругой среды, то компоненты перемещений полностью удовлетворяют уравнению Лапласа, для которых справедлив принцип максимума, который состоит в том, что максимальные (предельные) деформации достигаются на границе, в данном случае, на свободной поверхности, хотя напряжения на этом участке являются минимальными. Эта задача актуальна при исследовании процессов деформации контактных поверхностей элементов различных механизмов, где вопрос определения предела упругой деформации является конструктивно важным.

Ключевые слова: упругая деформация, контакт жесткого элемента с упругим материалом, математическое моделирование, потенциал перемещений, итерационно-разностная технология.

Impact of hard element on the free surface of an elastic material

M.A. Bubenchkov, A.I. Potekaev, A.M. Bubenchkov, A.V. Malozemov

Siberian Physical-Technical Institute, pl. Novosobornaya 1, 634050, Tomsk

The paper presents an example of the simplest mathematical techniques to determine the maximum deformation of the free surface of an elastic body in contact with the non-deformable element. Considerable attention is given to the calculation in the position of a free surface. Since the model operates with an incompressible elastic medium, the displacement components completely satisfy the Laplace equation, for which the maximum principle holds, which is that the maximum (limit) on the boundary deformation are achieved on the free surface, although the stresses on this site are minimal. This problem is important in the study of the processes of deformation of the contact surfaces of elements of different mechanisms, where the question of determining the limit of elastic deformation is structurally important.

Keywords: elastic deformation, the contact of the rigid element with an elastic material, mathematical modeling, potential displacement, iterative-difference technique.

Математическая модель деформаций

По аналогии с задачами о потенциальном течении жидкости рассмотрены процессы деформации в прямоугольной области занятой несжимаемым упругим материалом. Такие процессы имеют место и являются важными в задачах контактного взаимодействия деталей трансмиссионных систем в условиях наличия и эффективного действия в них смазочных материалов, когда касательные напряжения являются минимальными, а нормальные напряжения играют определяющую роль в распределении усилий в системе. Особую важность приобретают задачи о периодическом взаимодействии деталей системы, что, например, имеет место в системах передачи движения (трансмиссии, редукторы, и т.д.) поскольку от частоты и интенсивности таких воздействий зависит надежность и долговечность работы системы.

Будем рассматривать несжимаемую среду:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\vec{v} \equiv (u, v, w)$ – вектор перемещений точек среды.

Введем в рассмотрение потенциал перемещений Φ :

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\Phi. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (3)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа. По теореме разложения Гельмгольца, всякую деформацию можно представить как сумму объемной деформации, определяемой потенциалом перемещений Φ , и деформации сдвига, определяемой вектором $\vec{\Omega} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$:

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot}\vec{v}. \quad (4)$$

Задачи на определение деформаций сдвига решаются с помощью нахождения компонент рассматриваемого вектора, каждая из которых удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме этого, по аналогии с задачами динамики жидкости, потребуется ввести в рассмотрение аналог функции тока или векторного потенциала, компоненты которого будут удовлетворять уравнениям Пуассона. После решения вопроса с граничными условиями для упомянутых функций можно найти сдвиговые деформации, например, в задачах кручения или комплексных задачах на сжатие и сдвиг, и далее, используя принцип суперпозиции решения (утверждение, обратное теореме Гельмгольца), найти решение полной задачи.

В линейной теории упругости задача определения объемных деформаций может быть отделена от задачи расчета деформаций сдвига, что и сделано в настоящей работе. Поэтому ниже будет рассмотрена задача, связанная с нахождением потенциала перемещений Φ в прямоугольной области, одна из границ которой является свободной.

Обобщенный закон Гука

Предположим, что потенциал перемещений найден. Тогда, используя соотношение (2), можно найти вектор перемещений \vec{v} , то есть все его компоненты u, v, w .

В механике известны соотношения Коши [1, 3], которые определяют компоненты тензора деформаций через перемещения:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (6)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Теперь можно записать реологический закон, связывающий компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций. Простейшая линейная форма такой связи носит название обобщенного закона Гука [2]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (7)$$

Здесь по повторяющемуся индексу проводится суммирование. При этом $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ -

коэффициенты Ляме, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона. Из последнего соотношения для компонент тензора напряжений получаем

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \quad (8)$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}), \quad (9)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad (10)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}. \quad (11)$$

Граничные условия на свободной поверхности

Свободной является верхняя грань параллелепипеда. Здесь должно выполняться физическое условие равенства нулю нормального напряжения:

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (12)$$

С учетом связи закона Гука, это соотношение можно переписать в виде

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (13)$$

или через потенциал перемещений

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \kappa \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (14)$$

здесь

$$\kappa = \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (15)$$

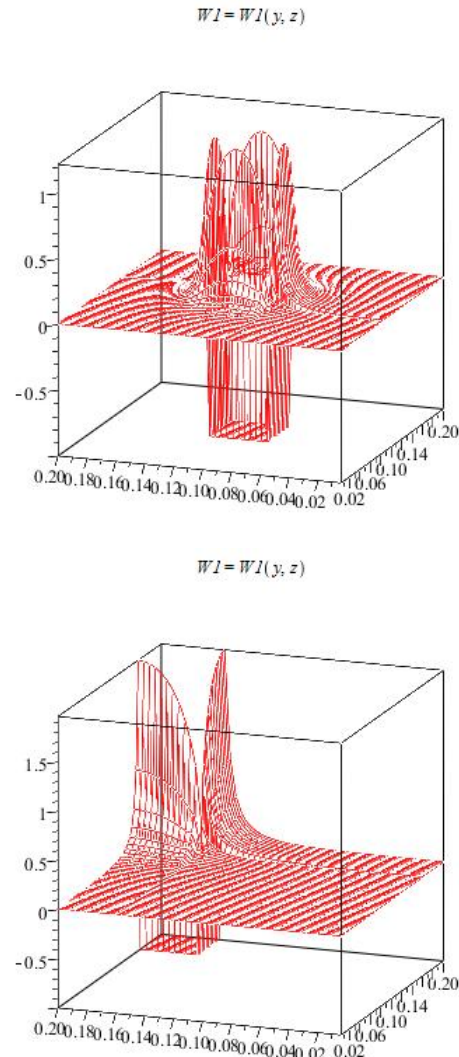


Рис. 1. Распределения вертикальной компоненты перемещения на свободной поверхности бассейна при различном положении вдавливающего элемента.

Разностная схема

Решение задачи расчета Φ будем строить итерационно-разностным методом, то есть с использованием простейших симметричных аппроксимаций для вторых производных и метода простой итерации для перерасчета значений искомой величины в узлах разностной сетки. Аппроксимируя вторые производные, входящие в оператор Лапласа симметричными разностями, получим следующий разностный аналог уравнения (3):

$$a_e \Phi_{i-1,j,k} + a_w \Phi_{i+1,j,k} + a_s \Phi_{i,j-1,k} + a_n \Phi_{i,j+1,k} + a_b \Phi_{i,j,k-1} + a_t \Phi_{i,j,k+1} - a_p \Phi_{i,j,k} = 0. \quad (16)$$

Выражая из последнего соотношения $\Phi_{i,j,k}$ получим рекуррентную формулу для пересчета значений искомой величины во внутренних точках области:

$$\Phi_{i,j,k} = \frac{a_e \Phi_{i-1,j,k} + a_w \Phi_{i+1,j,k} + a_s \Phi_{i,j-1,k} + a_n \Phi_{i,j+1,k} + a_b \Phi_{i,j,k-1} + a_t \Phi_{i,j,k+1}}{a_p}. \quad (17)$$

Здесь $a_e = a_w = \frac{1}{\Delta x^2}$, $a_s = a_n = \frac{1}{\Delta y^2}$, $a_b = a_t = \frac{1}{\Delta z^2}$. (18)

$$a_p = a_e + a_w + a_s + a_n + a_b + a_t. \quad (19)$$

Разностная аппроксимация условий на свободной поверхности

Пусть значение первого индекса, равно единице, отвечает рассматриваемой границе. Введем в рассмотрение фиктивный слой точек, которому будет соответствовать индекс ноль, и положим значение потенциала перемещений в этом слое, расположенном выше свободной поверхности, равным нулю. Тогда, используя симметричные аппроксимации всех вторых производных, входящих в (14), можем записать

$$\Phi_{i,j,l} = \frac{\Phi_{i,j,l-1} + \kappa \left(\frac{\Phi_{i,j-1,l} + \Phi_{i,j+1,l}}{\Delta y^2} + \frac{\Phi_{i-1,j,l} + \Phi_{i+1,j,l}}{\Delta x^2} \right)}{\frac{2}{\Delta z^2} + \frac{2\kappa}{\Delta y^2} + \frac{2\kappa}{\Delta x^2}} \quad (20)$$

В предельном случае $\kappa = 0$ последнее условие переходит в соотношение

$$\Phi_{i,j,l} = \frac{\Phi_{i,j,l-1}}{2}, \quad (21)$$

являющееся разностной реализацией равенства нулю второй производной от потенциала перемещений по нормальной к свободной поверхности координате в случае, когда в фиктивном слое принимается нулевое значение потенциала. Таким образом, в предельном случае значение потенциала перемещений на свободной по-

верхности равно половине значения этой величины в ближайшем сеточном узле.

На нижней и всех боковых гранях параллелепипеда задаются следующие разностные условия:

$$\Phi_1 = \frac{48\Phi_2 - 36\Phi_3 + 16\Phi_4 - 3\Phi_5}{25}, \quad (22)$$

которые выражают собой равенство нулю перемещений, взятых в направлении перпендикулярном к рассматриваемой границе, а два других индекса по соображениям простоты записи опущены. Здесь наименьший индекс определяет значение потенциала на границе.

На верхней грани, в области контакта со сдавливающим элементом использовано разностное условие, отвечающее перемещению недеформируемого элемента на величину w_0 :

$$\Phi_{i,j,l} = \frac{48\Phi_{i,j,l-1} - 36\Phi_{i,j,l-2} + 16\Phi_{i,j,l-3} - 3\Phi_{i,j,l-4} - 12w_0 dz}{25}. \quad (23)$$

Разностный вид этих соотношений получается заменой первых производных от потенциала перемещений односторонними разностями, имеющими третий порядок аппроксимации относительно шага по пространственной координате.

Результаты расчетов

Предварительно проводились следующие тесты:

Тривиальный тест

При $w_0 = 0$ и всех других описанных выше граничных условиях, получаются нулевые распределения для всех компонентов перемещений.

Баланс массы

Поскольку материал является несжимаемым, то свободная поверхность должна деформироваться таким образом, что бы объем ограниченный этой поверхностью оставался неизменным.

Представленные ниже данные получены на сетке $50 \times 50 \times 50$ узлов, при 20000 глобальных итерациях. При этом, расчетный баланс массы имеет погрешность 0.2%.

Ниже в качестве примера применения описанной схемы расчета представлены результаты сжатия упругого куба с ребром 0,2 м недеформируемым кубическим элементом с ребром 0,04 м. Предполагалось, что рассматривается металлический объект, характеризующийся коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. Деформации металлических образцов, происходящие в упругом режиме, составляют всего доли процентов от линейных размеров объекта. Заметим, что математическая постановка задачи допускает использование линейных размеров объекта в системе СИ, то есть в метрах, а рассчитывать перемещения в технических единицах, то есть в данном случае в микронах.

Как видно из представленных рисунков, в случае, когда недеформируемый элемент расположен у вертикального ребра бассейна, возникающие поперечные деформации почти в два раза больше, нежели при цен-

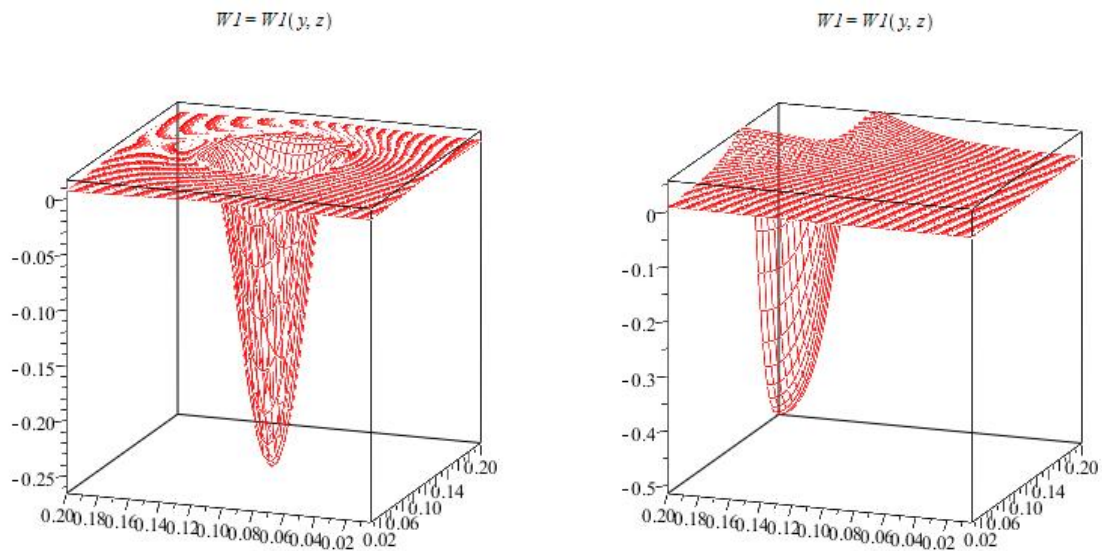


Рис. 2. Распределения вертикальной компоненты перемещения в толще образца на заглублении 0,02 м от верхней грани.

тральном расположении вдавливающего элемента, что объясняется большей стесненностью пространства вокруг него.

Заключение

В работе предложена схема расчета потенциальных деформаций упругих тел, основанная на введении потенциала перемещений.

Предложена итерационно-разностная вычислительная технология реализации поставленной задачи, главными особенностями которой является простота и универсальность.

Получено решение задачи о деформировании параллелепипеда и его свободной поверхности под воздействием абсолютно жесткого элемента.

Литература

1. С.П. Демидов. Теория упругости. М.: Высшая школа. (1979) 340 с.
2. Х. Хан. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир. (1988) 344 с.
3. А. Ляв. Математическая теория упругости. М.-Л.: Главная редакция общетехнической литературы и номографии. (1935) 674 с.