

## Асимметричная деформация линейно-упругого материала цилиндрической формы

Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Никипелова Т.И., Цыренова В.Б.,  
Щербakov Н.Р., Потеекаев А.И.<sup>†</sup>

<sup>†</sup>potekaev@spti.tsu.ru

Сибирский физико-технический институт Пл. Новособорная, 1 634050 Томск

В работе предложены вычислительная технология, реализующая задачи линейной теории упругости в цилиндрических координатах. Особое внимание уделяется зоне контакта двух тел. Для ее раскрытия предложено использовать сетки с экспоненциальным расположением узлов по каждому из трех координатных направлений. Расчетами установлено существенное влияние формы сдвливающего элемента на распределение напряжений в зоне контакта.

**Ключевые слова:** контактное воздействие, упругие перемещения точек, обобщенный закон Гука, касательные и нормальные напряжения, рекуррентные формулы, метод простой итерации.

## Asymmetric deformation of linear elastic cylindrical shape material

A.M. Bubenchkov, M.A. Bubenchkov, T.I. Nikipelova, V.B. Tsyrenova,  
N.R. Shcherbakov, A.I. Potekaev

Siberian Physical-Technical Institute Pl. Novosobornaya 1 634050 Tomsk

This paper describes a computational technology realizing the problem of linear elasticity in cylindrical coordinates. Particular attention is paid to the area of contact between two bodies. Using the grids with exponential nodes location in all three coordinates is proposed. A significant effect of the pressure element shape on the stress distribution in the contact zone is proposed.

**Keywords:** contact impact; elastic points displacement; generalized Hooke's law; the tangential and normal stresses; recursion formulas; a simple iteration.

### Определяющие уравнения

В настоящей работе нас будут интересовать максимальные локальные нормальные и касательные напряжения, возникающие в зоне контакта цилиндра с жестким элементом, то есть другим телом, обладающим менее выраженной способностью к деформированию. Величина этих напряжений будет зависеть от степени деформации и от упругих свойств материала цилиндра. Поэтому изначально решение будем строить в перемещениях, а затем, используя реологическую модель линейного упругого тела, найдем компоненты тензора искомых напряжений внутри тела и на границе.

Уравнения равновесия в перемещениях, записанные в цилиндрических координатах, имеют вид [1]:

$$\nabla^2 u + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r(1-2\nu)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{\rho}{G} f_\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 v - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\rho}{G} f_r = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\rho}{G} f_z = 0, \quad (3)$$

$$\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – окружное, радиальное и осевое смещения точки;  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  – цилиндрические координаты;  $\rho$  – плотность среды;  $f_r$ ,  $f_\varphi$ ,  $f_z$  – проекции массовой силы на оси выбранной системы координат;  $\theta$  – объемная деформация;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль упругости при сдвиге;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;

$$u_{i,j,k} = \frac{a_e u_{i,j-1,k} + a_w u_{i,j+1,k} + b a_n u_{i-1,j,k} + b a_s u_{i+1,j,k} + a_t u_{i,j,k-1} + a_b u_{i,j,k+1} + s_p}{1 + a_p + a_n(b-1) + a_s(b-1)}, \quad (8)$$

$$v_{i,j,k} = \frac{b a_e v_{i,j-1,k} + b a_w v_{i,j+1,k} + a_n v_{i-1,j,k} + a_s v_{i+1,j,k} + a_t v_{i,j,k-1} + a_b v_{i,j,k+1} + s_{p1}}{b + a_p + a_e(b-1) + a_w(b-1)}, \quad (9)$$

$$w_{i,j,k} = \frac{a_e w_{i,j-1,k} + a_w w_{i,j+1,k} + a_n w_{i-1,j,k} + a_s w_{i+1,j,k} + b a_t w_{i,j,k-1} + b a_b w_{i,j,k+1} + s_{p2}}{a_p + a_t(b-1) + a_b(b-1)}, \quad (10)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Ла-}$$

пласа.

В дальнейшем будем полагать, что нагрузки, прикладываемые к контактирующим элементам системы, настолько значительны, что их собственным весом по сравнению с нагрузками можно пренебречь, а силы электромагнитной природы вообще не будем принимать к рассмотрению, так что

$$f_r = f_\varphi = f_z = 0.$$

Подставляя (4) в (1)–(3) и раскрывая оператор Лапласа, получим следующую систему определяющих уравнений в перемещениях:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{b}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} + \quad (5)$$

$$+ \frac{b+1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{b-1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + (b-1) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{b}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{b}{r^2} v - \quad (6)$$

$$- \frac{b+1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{b-1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + (b-1) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + b \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \quad (7)$$

$$+ \frac{b-1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{b-1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} + (b-1) \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} = 0,$$

$$\text{где } b = \frac{2-2\nu}{1-2\nu}.$$

Следует сказать, что при формулировке задач теории упругости в компонентах перемещений как основных функций уравнения совместности деформаций удовлетворяются автоматически [2, с. 50].

### Разностная схема

Аппроксимируем производные в уравнениях (5)–(7) симметричными разностями на неравномерной сетке и выразим значения перемещений в центральном узле шаблона через значения в узлах окружения, получим

$$a_n = \frac{2}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}, \quad (11)$$

$$a_s = \frac{2}{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})},$$

$$a_e = \frac{r_e r_j}{(r_j - r_{j-1})(r_w - r_e)}, \quad (12)$$

$$a_w = \frac{r_w r_j}{(r_{j+1} - r_j)(r_w - r_e)},$$

$$a_t = \frac{2r_j^2}{(z_k - z_{k-1})(z_{k+1} - z_{k-1})}, \quad (13)$$

$$a_b = \frac{2r_j^2}{(z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} - z_{k-1})},$$

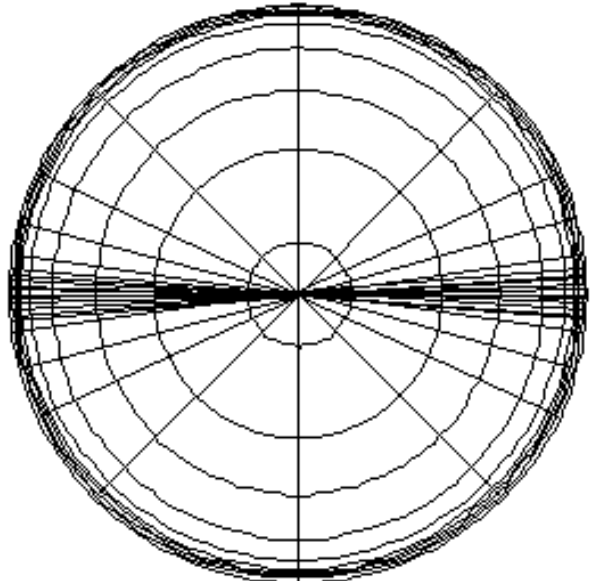


Рис. 1. Сжатие сетки в окрестности зоны контакта

$$s_p = \frac{(b+1)(v_{i+1,j,k} - v_{i-1,j,k})}{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})} + \frac{r_j(b-1)(v_{i+1,j+1,k} - v_{i+1,j-1,k} - v_{i-1,j+1,k} + v_{i-1,j-1,k})}{(r_{j+1} - r_{j-1})(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})} +$$

$$+ \frac{r_j(b-1)(w_{i+1,j,k+1} - w_{i+1,j,k-1} - w_{i-1,j,k+1} + w_{i-1,j,k-1})}{(z_{k+1} - z_{k-1})(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}, \quad (14)$$

$$s_{p1} = \frac{-(b+1)(u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k})}{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})} + \frac{r_j(b-1)(u_{i+1,j+1,k} - u_{i+1,j-1,k} - u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k})}{(r_{j+1} - r_{j-1})(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})} +$$

$$+ \frac{r_j^2(b-1)(w_{i,j+1,k+1} - w_{i,j+1,k-1} - w_{i,j-1,k+1} + w_{i,j-1,k-1})}{(r_{j+1} - r_{j-1})(z_{k+1} - z_{k-1})}, \quad (15)$$

$$s_{p2} = \frac{r_j(b-1)(v_{i+1,j,k} - v_{i-1,j,k})}{(z_{k+1} - z_{k-1})} + \frac{r_j(b-1)(u_{i+1,j,k+1} - u_{i+1,j,k-1} - u_{i-1,j,k+1} + u_{i-1,j,k-1})}{(z_{k+1} - z_{k-1})(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})} +$$

$$+ \frac{r_j^2(b-1)(v_{i,j+1,k+1} - v_{i,j+1,k-1} - v_{i,j-1,k+1} + v_{i,j-1,k-1})}{(r_{j+1} - r_{j-1})(z_{k+1} - z_{k-1})}, \quad (16)$$

$$\text{Здесь } r_e = \frac{(r_j + r_{j-1})}{2}, \quad r_w = \frac{(r_j + r_{j+1})}{2}.$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_t + a_b \quad (17)$$

Формулы (8)–(10) реализуют решения пространственных уравнений Ляме, и используемые совместно с разностными граничными условиями пригодны для решения всех задач линейной теории упругости.

### Построение разностной сетки

Строим экспоненциально сгущающуюся на пятне контакта сетку, следуя преобразованиям

$$\{\varphi, r, z\} \rightarrow \{\theta, \rho, \zeta\}: \quad \psi = \ln(\varphi + \varepsilon), \quad (18)$$

$$\rho = \ln(R - r + \delta), \quad \zeta = \ln(z + \gamma).$$

Пусть  $N$  – число точек разбиения по радиусу,  $M_1 - 1$  – число разностных секторов в первой четверти,  $2K$  – число точек разбиения по осевой координате. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta\rho &= \frac{\ln(\delta) - \ln(R + \delta)}{N - 1} \\ \Delta\psi &= \frac{\ln(\varepsilon) - \ln\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)}{M_1 - 1} \\ \Delta\zeta &= \frac{\ln(\gamma) - \ln\left(\frac{h}{2} + \gamma\right)}{K - 1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_j &= \ln(R + \delta) + (j - 1)\Delta\rho, \quad (j = 1, N) \\ \psi_i &= \ln\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + (i - 1)\Delta\psi, \quad (i = 1, M_1) \\ \zeta_k &= \ln\left(\frac{h}{2} + \gamma\right) + (k - 1)\Delta\zeta, \quad (k = 1, K) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} r_j &= R + \delta - \exp(\rho_j), \quad (j = 1, N) \\ \varphi_i &= \frac{\pi}{2} + \varepsilon - \exp(\psi_i), \quad (i = 1, M_1) \\ z'_k &= \frac{h}{2} + \gamma - \exp(\zeta_k), \quad (k = 1, K) \\ z_k &= z'_k \quad (k = 1, K), \quad z_k = z'_{2K-k} \quad (k = K, 2K) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Здесь  $h, R$  – высота и радиус цилиндра;  $\delta, \varepsilon, \gamma$  – параметры преобразования (малые величины).

Формулы (19)–(21) позволяют построить экспоненциально сгущающуюся разностную сетку по каждому из трех координатных направлений. Однако на рис.1 показана картина, полученная в сечении, перпендикулярном оси цилиндра, где видны сгущения сетки лишь по радиальному и окружному направлениям.

### Обобщённый закон Гука

Запишем обобщенный закон Гука [2]:

$$\sigma_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} \varepsilon_{k,k} + 2\mu \varepsilon_{i,j}. \quad (22)$$

Здесь предполагается, что по индексу  $k$  выполнено суммирование. При этом  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – коэффициенты Ляме. Из последнего соотношения находим, что

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi,\varphi} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi,\varphi} + \lambda(\varepsilon_{r,r} + \varepsilon_{z,z}), \\ \sigma_{r,r} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{r,r} + \lambda(\varepsilon_{\varphi,\varphi} + \varepsilon_{z,z}), \\ \sigma_{z,z} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{z,z} + \lambda(\varepsilon_{r,r} + \varepsilon_{\varphi,\varphi}), \\ \sigma_{r,\varphi} &= 2\mu\varepsilon_{r,\varphi}, \quad \sigma_{z,\varphi} = 2\mu\varepsilon_{z,\varphi}, \quad \sigma_{r,z} = 2\mu\varepsilon_{r,z}.\end{aligned}\quad (23)$$

При этом компоненты тензора деформаций в цилиндрических координатах определяются следующими соотношениями [1, 3]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi,\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{r}, \quad \varepsilon_{r,r} = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \varepsilon_{z,z} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r,\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right), \\ \varepsilon_{z,\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ \varepsilon_{r,z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (24)$$

#### Условия на границах цилиндрического тела и на координатной оси

Пусть  $M \equiv (r, \varphi, z)$  – точка на границе сплошного цилиндрического тела;

$$\Omega_0 \equiv \left\{ \begin{aligned} r &= R, \quad \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0], \\ z &\in \left[ \frac{h}{2} - z_0, \frac{h}{2} + z_0 \right] \end{aligned} \right\}$$

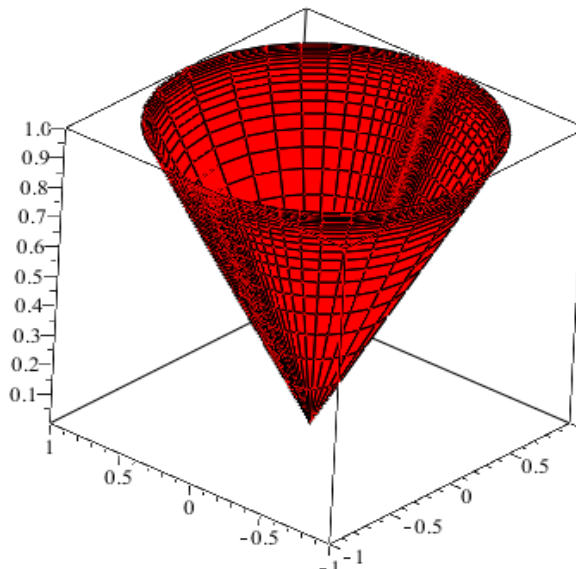


Рис. 2. Распределение окружной компоненты в тестовом примере

– область приложения внешнего силового воздействия (пятно контакта); величина  $2z_0$  – определяет размер пятна контакта в осевом направлении.  $\Omega \cup \Omega_0 (r = R)$  – боковая поверхность цилиндра;  $\Omega_1 (z = 0)$  – нижняя торцевая грань;  $\Omega_2 (z = h)$  – верхняя торцевая грань.

Тогда граничные условия, используемые при решении пространственной задачи контактного воздействия на тело цилиндрической формы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}M \in \Omega_0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= 0, \\ v &= v_0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}M \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= 0, \\ c \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \right) + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (26)$$

$$M \in \Omega_1, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (27)$$

$$M \in \Omega_2, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \quad (28)$$

Здесь  $c = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}$ ,  $v_0$  – постоянная величина радиального перемещения на пятне контакта. Координатная особенность на полярной оси разрешается следующим образом [4]:

$$\begin{aligned}u_{i,1,k} &= \frac{1}{M} \sum_{v=1}^M u_{v,2,k}, \quad v_{i,1,k} = \frac{1}{M} \sum_{v=1}^M v_{v,2,k}, \\ w_{i,1,k} &= \frac{1}{M} \sum_{v=1}^M w_{v,2,k} \quad (i = \overline{1, M}; k = \overline{1, 2K})\end{aligned}\quad (29)$$

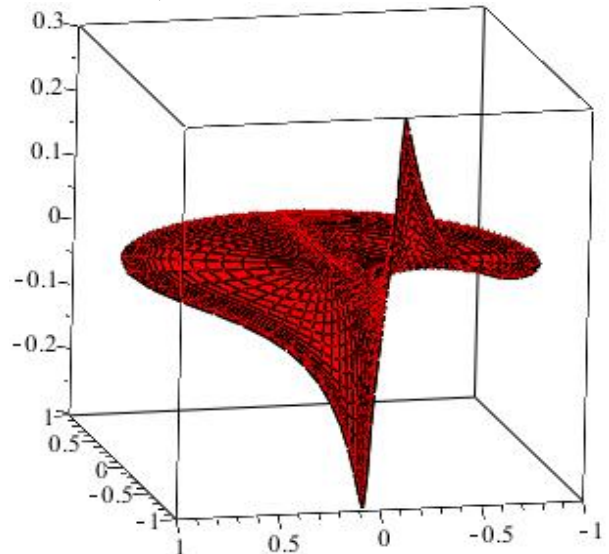


Рис. 3. Распределение окружной компоненты при контактном воздействии жесткого элемента

Условие периодичности имеет вид

$$\begin{aligned} u_{M,j,k} &= u_{1,j,k}, & v_{M,j,k} &= v_{1,j,k}, \\ w_{M,j,k} &= w_{1,j,k} & (j=1, N; k=1, 2K) \end{aligned} \quad (30)$$

Первое условие в (25) и (26) выражает равенство нулю напряжения  $\sigma_{r,\varphi}$ , третье — равенство нулю напряжения  $\sigma_{r,z}$ . Второе соотношение в (26) определяет равенство нулю нормального напряжения  $\sigma_{r,r}$ .

### Результаты расчетов

Тестирование задачи проводилось на тривиальном решении, отвечающем случаю  $v_0 = 0$ . В этом примере мы получаем нулевые распределения для всех компонент

перемещений. Еще один тривиальный тест ( $v_0 = 0$ ) относился к примеру, когда однородные условия первого рода для компонент перемещений (27), (28) были заменены на соответствующие условия второго рода (условия свободной торцевой поверхности цилиндра), а первое условие в (25) замещено условием  $u = u_0 = \text{const}$ . В этом случае мы получаем поворот цилиндра как целой фигуры, что отражено на рис.2. При этом какие-либо деформации и напряжения в теле отсутствуют. Рисунками 3-7 иллюстрируется расчет, отвечающий граничным условиям (25)–(28).

Цилиндрическое тело, отвечающее представленным данным, имело следующие размеры:  $R = 5 \cdot 10^{-2}$  м,  $h = 5 \cdot 10^{-2}$  м. Пятно контакта располагалось в центральной части боковой поверхности и определялось длинами  $\Delta z = 3,925 \cdot 10^{-3}$  м,  $\Delta l = 6,578 \cdot 10^{-3}$  м. Ниже на графиках все значений перемещений представлены в микронах,

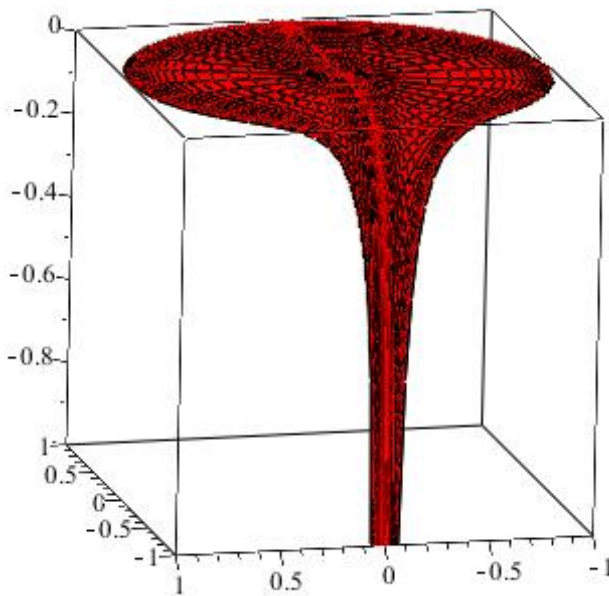


Рис. 4. Распределение радиальной компоненты при контактном воздействии жесткого элемента.

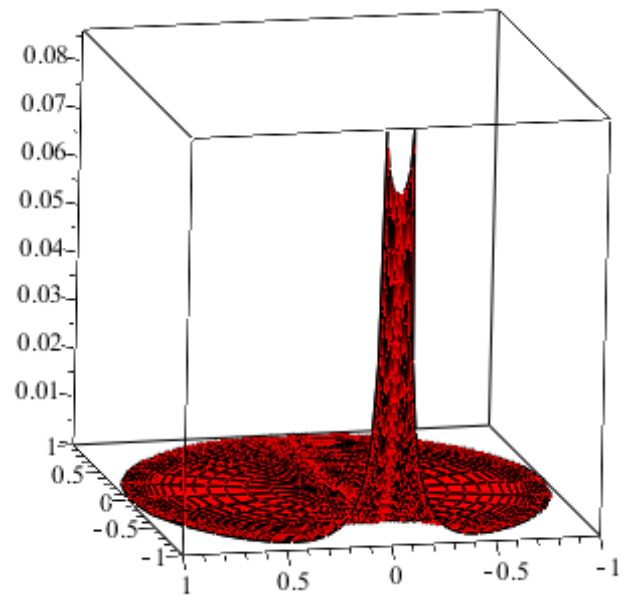


Рис. 5. Распределение осевой компоненты при контактном воздействии жесткого элемента.

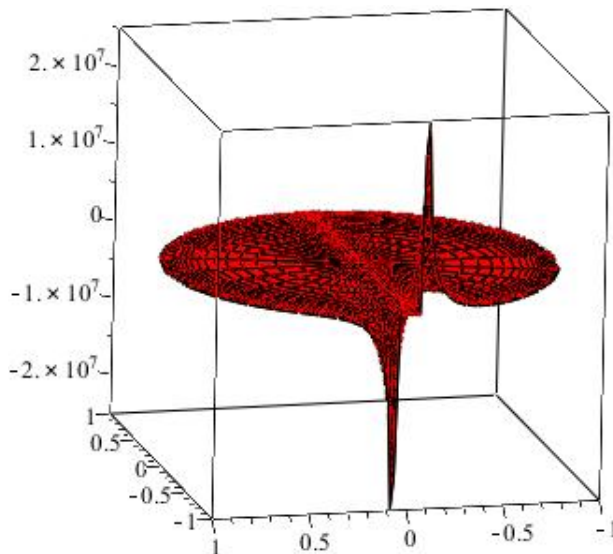


Рис. 6. Распределение касательного напряжения  $\sigma_{r,\varphi}$  при контактном воздействии жесткого элемента.

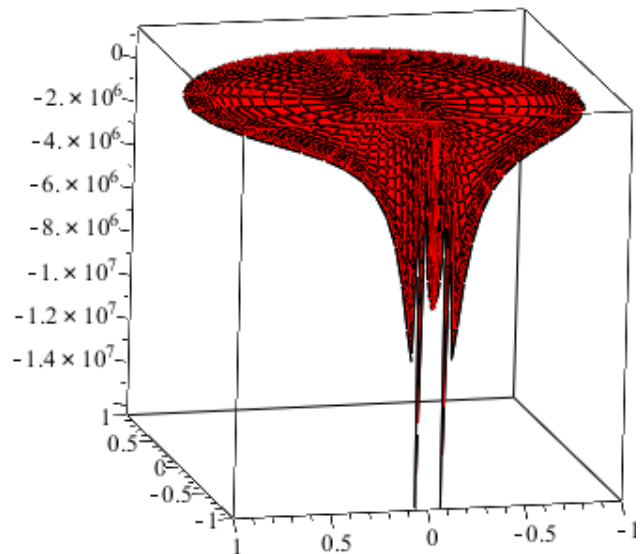


Рис. 7. Распределение нормального напряжения  $\sigma_{\varphi,\varphi}$  при контактном воздействии жесткого элемента.

напряжения приведены в системе СИ, радиальная координата дается в безразмерном виде:  $r/R$ .

Как видим из представленных распределений, заданные радиальные перемещения на пятне контакта индуцируют окружные и осевые перемещения на поверхности и внутри тела. Как следует из рис.3, окружная компонента перемещения быстро возрастает с удалением от центра пятна контакта, а затем на некотором удалении от плоскости симметрии наблюдается срыв (излом с изменением знака производной).

Не вдаваясь в подробности анализа полученного решения, обратим внимание на распределение нормальных (по отношению к окружной координате) напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , представленных в горизонтальном сечении, проходящем через середину пятна контакта (рис.7). Внутренняя пара «усов» у этой фигуры определяется изломом в распределении радиальной компоненты перемещений (рис.4), то есть краями пятна контакта. Внешняя пара – срывом в поверхностном распределении окружной компоненты перемещения (рис.3, два срыва – слева и справа от плоскости симметрии).

## Литература

1. С.П. Демидов. Теория упругости. М.: Высшая школа. 1979. 340 с.
2. Х. Хан. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир. 1988. 344 с.
3. А. Ляв. Математическая теория упругости. М.-Л.: Главная редакция общетехнической литературы и номографии. 1935. 674 с.
4. А.М. Бубенчиков, Р.З. Ливаев. Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. 4, 32 (2001).