

# Моделирование хиральных структур микрополярного типа

Васильев А.А. †

<sup>1</sup> Тверской государственной университет

† aleksey.vasiliev@gmail.com

## Modeling of micropolar type chiral structures

Vasiliev A.A. <sup>1</sup>

Tver State University

Рассмотрены вопросы моделирования поведения материалов с хиральной микроструктурой. Введена модель структурных соединений, обобщающая модели сложного соединения частиц конечного размера и трехзвенного соединения балочного типа. Получены аналитическое решение для квадратной ячейки и численное решение для решетки с включением. Решения демонстрируют обусловленные хиральностью особенности деформирования. Для квадратной решетки Коссера построены уравнения аппроксимирующей континуальной среды микрополярного типа.

**Ключевые слова:** хиральная решетка, структурная модель, микрополярная модель, структурные эффекты

Modeling of materials with chiral microstructure is considered. A model of structural joints is introduced. This model is a generalization of the models with complex interaction of finite size particles and three-link beam connections. Analytical solutions for a square cell and numerical solution for the lattice with a rigid inclusion are obtained. The latter solution clearly demonstrates the effect of chiral microstructure. Approximating continuum micropolar type model is derived for the square chiral Cosserat lattice.

**Keywords:** chiral lattice, structural model, micropolar model, structural effects

### Введение

Разработка структурных и математических моделей материалов с особыми свойствами привлекает в настоящее время нарастающий интерес. Одним из примеров таких свойств является свойство ауксетичности, то есть свойство материала расширяться в поперечном направлении при его растяжении. Все более активно обсуждаются вопросы моделирования, особенности поведения хиральных структур, возможности их практического применения [1-3]. Настоящая статья представляет обобщение известных результатов и некоторые новые результаты исследований авторов в этом направлении.

### Обобщенная модель соединения для построения решеток Коссера

В качестве структурных моделей для моделирования материалов с учетом микровращений частиц широко используются решетки Коссера. В статье рассматривается плоская система частиц, кинематика которых определяется векторами смещений с компонентами  $u$  и  $v$ , а также вращениями  $\varphi$ .

Для описания взаимодействия частиц  $m$  и  $n$  вводим потенциал

$$E_p = \frac{1}{2} C_{11} \Delta u^2 + \frac{1}{2} C_{22} \gamma^2 + \frac{1}{2} C_{33} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} C_{12} \Delta u \gamma, \quad (1)$$

где использованы обозначения  $\Delta u = u_n - u_m$ ,  $\gamma = v_n - v_m - h(\varphi_n + \varphi_m)/2$ ,  $\Delta \varphi = \varphi_n - \varphi_m$ ,  $h$  - расстояние между частицами.

В сравнении с широко используемыми при построении моделей микрополярной теории упругости феноменологическим потенциалом [4], потенциальной энергией сложного соединения частиц с симметричными ( $c_2 = c_3$ ) связями [5], соединения балочного типа [6] в потенциале (1) введено дополнительное слагаемое  $C_{12} \gamma \Delta u$ . Далее покажем, что частными случаями, в которых применим введенный потенциал, являются сложные несимметричные соединения частиц конечного размера (рис. 1а) с  $c_2 \neq c_3$ , а также трехзвенные балочные соединения (рис. 1в).

*Модель сложного несимметричного соединения частиц конечного размера.* Рассматриваем сложное соединение частиц конечного размера, представленное на рис. 1а. Жесткости диагональных соединений выбираем равными  $c_2$ ,  $c_3$ . Это дает возможность наряду с симметричными соединениями при  $c_2 = c_3$  рассмотреть и дать анализ несимметричных соединений с  $c_2 \neq c_3$ . Потенциал сложного соединения получаем суммированием потенциалов составляющих пружинных соединений. После

преобразований потенциал приводится к виду (1). Выражения параметров потенциала (1) через микроструктурные параметры системы частиц конечного размера имеют вид

$$\begin{aligned} C_{11} &= c_0 / h^2 + 2c_1 / r^2 + r^2(c_2 + c_3) / d^4, \\ C_{22} &= 4a^2(c_2 + c_3) / d^4, \\ C_{33} &= 2a^2c_1 / r^2, \\ C_{12} &= 4ar(c_2 - c_3) / d^4. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $r=h-2a$  - расстояние между частицами,  $d = \sqrt{h^2 + (2a)^2}$  - длина диагонального элемента. В случае симметричного соединения  $c_2=c_3$  параметр  $C_{12}=0$  и введенная составляющая отсутствует.

Модель трехзвенного соединения балочного типа. Рассматриваем трехзвенное балочное соединение (рис. 1в). Перемещения и вращения внутренних узлов трехзвенного соединения однозначно выражаются через перемещения и вращения крайних узлов. Исключив внутренние степени свободы, после преобразований выражение потенциала соединения может быть записано в виде (1). Выражения для параметров потенциала (1) через параметры балочных элементов трехзвенного соединения (рис. 1б, 1в) имеют вид

$$\begin{aligned} C_{11} &= \beta(h^2\bar{h}^2 A + 48a^2 I), \\ C_{22} &= \beta(a^2\bar{h}^2 A + 12h^2 I), \\ C_{33} &= EI/\bar{h}, \\ C_{12} &= -(3/2)\beta ah^2\bar{h}^2 A, \\ \bar{h} &= \sqrt{h^2 + 4a^2}, \\ \beta &= 192\bar{h}IAE / [7a^2h^2\bar{h}^4 A^2 + 192\bar{h}^2(h^4 + 4a^4)AI + 9216a^2h^2 I^2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что в случае  $a=0$  получаем простое балочное соединение с  $C_{12}=0$ .

### Анализ особенностей деформирования структурных систем

Конечно-элементная модель. С использованием потенциальной энергии (1) может быть построена матрица жесткости соединяющего элемента в локальной системе

координат  $K_0 = [K_{ij}]_{i=\bar{1},\bar{6},j=\bar{1},\bar{6}}$  с компонентами

$K_{ij} = \partial^2 E_p / \partial U_i \partial U_j$ , где  $\bar{U} = [u_m, v_m, \varphi_m, u_n, v_n, \varphi_n]$  - вектор степеней свободы соединяемых частиц. Используя эту матрицу и матрицу поворотов  $G$ , которая совпадает с известной матрицей поворотов, используемой в балочных моделях метода конечных элементов (МКЭ), могут быть получены матрицы жесткости элементов в глобальной системе координат  $K_\varphi = G^T K_0 G$ . Далее, используя процедуру МКЭ для суммирования матриц жесткости элементов системы, может быть построена глобальная матрица жесткости системы, а с учетом силовых и моментных нагрузок - уравнения системы.

Аналитическое исследование для квадратной ячейки. Рассмотрим растяжение квадратной ячейки (рис. 2а) на величину  $2\Delta v$  в поперечном направлении. Такое деформирование допускает аналитическое исследование. С использованием конечно-элементной процедуры строим систему уравнений. С учетом симметрий ее упрощаем и находим аналитическое решение, определяющее соотношение перемещений в продольном и поперечном направлениях  $\Delta u = \alpha \Delta v$ ,  $\alpha = C_{12}/2C_{22}$ . Повороты в узлах равны нулю.

В частном случае частиц конечного размера с учетом выражений параметров потенциала (1) через микроструктурные параметры (2) имеем

$$\Delta u = \alpha \Delta v, \quad \alpha = \frac{h - 2a}{2a} \frac{c_2 - c_3}{c_2 + c_3}. \quad (4)$$

При  $c_2 \neq c_3$  системы обладают интересным свойством: они отклоняются в поперечном направлении при растяжении в продольном направлении, при этом по направлению отклонения можно судить растягивается система или сжимается. На величину и направление отклонения можно влиять выбором параметров в выражении (4) для  $\alpha$ .

Рисунок 2 демонстрирует результаты. Показано деформирование квадратной ячейки с жесткостями  $c_1=c_3=0$ ,  $c_2 \neq 0$ ,  $c_0 \neq 0$  (рис. 2а) при растяжении (рис. 2б) и сжатии (рис. 2в) на величину  $2\Delta v$ .

Хиральные решетки Коссера. Вычислительный эксперимент. Представленные модели (рис. 1а, 1в) и по-

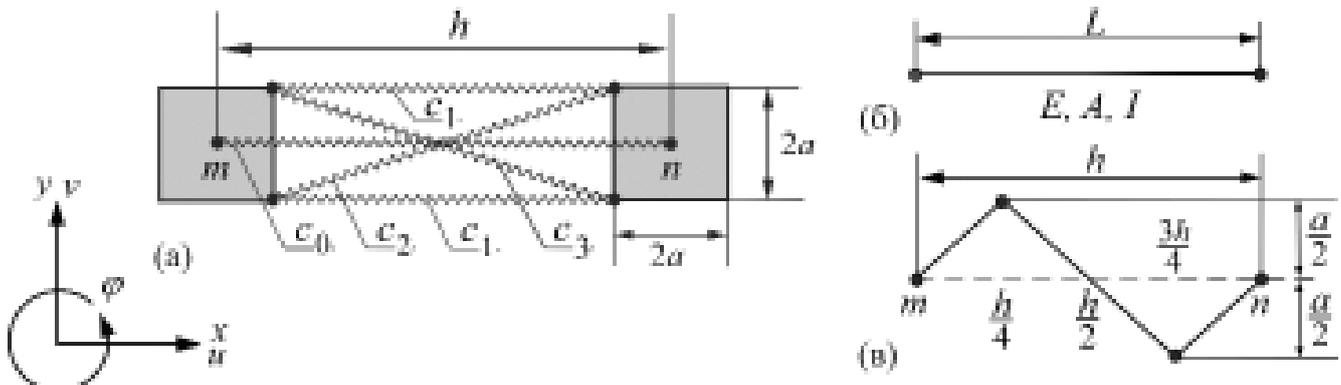
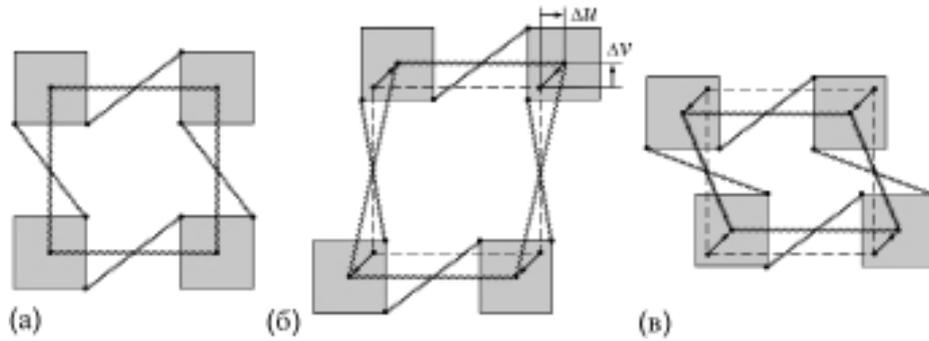
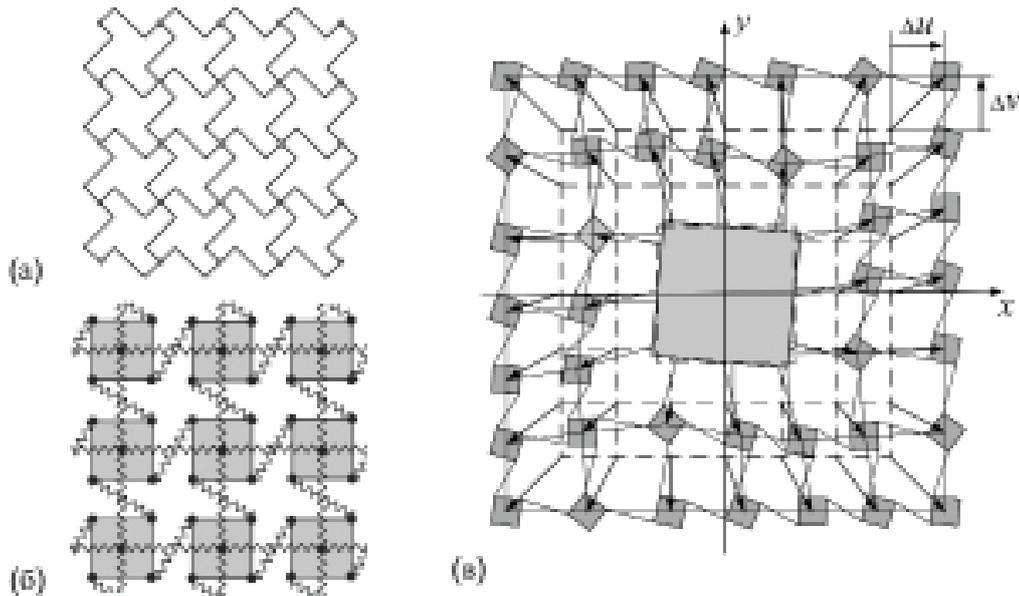


Рис. 1. (а) Сложное соединение частиц конечного размера. (б) Балочный элемент. (в) Трехзвенное соединение балочного типа. Система координат, параметры моделей и обозначения, используемые в статье.



**Рис. 2.** (а) Квадратная ячейка в недеформированном состоянии. Деформация ячейки при растяжении (б) и сжатии (в) на  $2\Delta v$ . Исходная квадратная ячейка показана пунктирной линией.



**Рис. 3.** Хиральные решетки на основе трехзвенных балочных соединений (а) и частиц конечного размера с несимметричными соединениями (б). Деформирование хиральной решетки с жестким включением при растяжении граней на  $\Delta u = \Delta v$  (в).

тенциал (1) с параметрами (2), (3) представляют интерес, поскольку на их основе могут быть сформированы хиральные решетки Коссера (рис. 3а, 3б) и их модели. Особенности поведения в достаточно сложных случаях позволяет выявить компьютерное моделирование на основе конечно-элементных моделей. На рис. 3в представлен результат деформирования решетки с жестким включением, составленным из 9 частиц, при растяжении на величину  $\Delta v$  верхней и нижней граней и на равную ей величину  $\Delta u$  боковых граней (рис. 3в). При этом предполагалось свободное смещение частиц вдоль граней. В качестве характерных представляющих интерес особенностей поведения отметим несимметрию деформирования хиральной решетки относительно осей  $O_x, O_y$ , поворот жесткой частицы. Для решетки с симметричными связями нарушение симметрии и поворот отсутствуют.

### Микрополярная модель

Структурные модели и введенный потенциал может также использоваться для построения моделей обобщенной континуальной механики. Построив уравнения для узла, длинноволновым переходом, раскладывая компоненты обобщенных перемещений в ряд Тейлора

до производных второго порядка включительно, могут быть построены уравнения континуальной модели

$$\begin{aligned}
 C_{11}u_{xx} + C_{22}(u_{yy} + \varphi_y) + C_{12}(v_{xx} - v_{yy} - \varphi_x)/2 + f_x(x, y) &= 0, \\
 C_{11}v_{yy} + C_{22}(v_{xx} - \varphi_x) + C_{12}(u_{xx} - u_{yy} - \varphi_y)/2 + f_y(x, y) &= 0, \\
 (C_{33} - h^2 C_{22}/4)(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + C_{22}(v_x - u_y - 2\varphi) + \\
 C_{12}(u_x + v_y)/2 + m(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $f_x(x, y), f_y(x, y), m(x, y)$  - плотность распределенных сил и моментов.

Уравнения (5) являются уравнениями микрополярного типа [7], уточняющими уравнения классической теории упругости. Помимо перемещений они включают и описывают микровращения, например вращения частиц (рис. 3в).

Отметим, что при  $C_{12} = 0$  уравнения (5) дают микрополярные уравнения квадратной балочной решетки с обычными элементами (рис. 2б) [6], квадратной решетки частиц конечного размера с симметричными сложными соединениями [5], а также модели, которые строятся на

основе феноменологического потенциала вида [4]. Уравнения (5) включают отмеченные модели как частный случай и при выборе параметров (2), (3) описывают хиральные решетки (рис. 3а, 3б).

### Заключение

В статье введен потенциал, описывающий соединения частиц, содержащий дополнительную к широко используемому потенциалу составляющую. Показано, что введенный потенциал описывает соединения частиц конечного размера, в которых предполагается отсутствие симметрии (рис. 1а), а также трехзвенные балочные соединения (рис. 1в). Представлено выражение параметров потенциала (1) через структурные параметры моделей (2), (3). Эти модели и их обобщение, на наш взгляд, представляют интерес, поскольку они являются обобщениями широко используемых в микрополяриной теории структурных моделей: модели соединения частиц конечного размера со сложными симметричными соединениями, соединений балочного типа, феноменологического потенциала. Такие модели применяются, например, при моделировании гранулированных материалов, материалов с балочной микроструктурой. В статье приводятся и рассматриваются практически реализуемые структурные системы на основе вводимых соединений – квадратная ячейка (рис. 2а), хиральные решетки Коссера (рис. 3а, 3б). Аналитическое исследование и вычислительные эксперименты позволяют выявить интересную особенность поведения – несимметричную реакцию таких структур на воздействия, управлять которой можно используя микроструктур-

ные параметры. Для анализа систем с большим количеством элементов используются континуальные модели. В статье построены континуальные уравнения, которые применимы как аппроксимационные для решеток с хиральной микроструктурой (рис. 3а, 3б). Показано, что такие уравнения являются уравнениями микрополяриного типа, отмечены изменения уравнений, порождаемые вводимой для уточнения описания микроструктуры модификацией.

### Литература

1. Spadoni A., Ruzzene M. Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *J. Mech. Phys. Solids*. (60), 156(2012).
2. Liu X.N., Huang G.L., Hu G.K. Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its applications to chiral lattices. *J. Mech. Phys. Solids*, 2012 (60), p. 1907-1921.
3. Vasil'ev A.A. , Dmitriev S.V., Pavlov I.S. Perspektivnuyе materialu. (12), 87 (2011) (in Russian) [Васильев А.А., Дмитриев С.В., Павлов И.С. Перспективные материалы, (12), 87 (2011).]
4. Suiker A.S.J., Metrikine A.V., de Borst R. *Int. J. Solids Struct.*(38), 1563 (2001).
5. Pavlov I.S., Potapov A.I., Maugin G.A. *Int. J. Solids Struct.* (43), 6194 (2006).
6. Kim K.S., Piziali R.L. *Int. J. Solids Struct.* (23), 1563 (1987).
7. Eringen A.C. Theory of micropolar elasticity, in: *Fracture*, v. 2. Ed. Liebowitz H., New York: Academic Press, 1968, p. 621–729.