

Анализ ауксетических свойств ячейки с частицами конечного размера

Васильев А.А.

Тверской государственной университет, Садовый пер. 35, 170002 Тверь

alvasiliev@yandex.ru

Analysis of auxetic properties of the cell having finite size particles

A.A. Vasiliev

Tver State University, Sadoviy per. 35, 170002 Tver, Russia

Представлены результаты аналитического исследования ауксетических свойств квадратной ячейки с частицами конечного размера, аналитическое и численное исследование интересного свойства такой ячейки (решетки) сжиматься в поперечном сечении (уплотняться) под сближающимися частицами и нагрузкой.

Ключевые слова: ауксетические свойства; квадратная ячейка; частицы конечного размера.

Auxetic properties of square cell of finite size particles are considered. Analytical and numerical solutions are given. An interesting property is demonstrated and studied: for some parameters the cell becomes thinner in cross section between two approaching particles and under pressure.

Keywords: auxetic properties; square cell; finite size particles.

1. Введение

В настоящее время все большее внимание уделяется разработке математических моделей метаматериалов – материалов, обладающих необычными свойствами (см., например, [1-17]). Одним из таких свойств является свойство ауксетичности – отрицательного коэффициента Пуассона, когда материал расширяется в поперечном направлении при растяжении в продольном.

Вариант структурной модели ауксетического материала на основе частиц конечного размера (рис. 1а) был предложен в статьях [8], [11]. Математические дискретная и континуальная микрополярные модели были построены в [13]. В этой статье найдена и исследована

зависимость между коэффициентом Пуассона аппроксимирующей континуальной среды и структурными параметрами дискретной системы, построены и исследованы дисперсионные соотношения гармонических волн. В статьях [2, 3, 14, 15] построена многополевая микрополярная модель, описывающая не только макроскопические длинноволновые, но и коротковолновые деформации, исследованы одномерные краевые эффекты.

Результаты дополнительных исследований свойств и особенностей поведения такого материала представлены в настоящей статье.

2. Структурная и математическая модели

Рассматриваем ячейку, базовую для представленной на рис. 1а решетки, но без наклона частиц, введя дополнительные горизонтальные и вертикальные соединения центров частиц (рис. 1б). Связи между частицами моделируются пружинами трех видов: вертикальные и горизонтальные пружины с жесткостью c_1 , а также диагональные пружины с жесткостью c_2 соединяют центры частиц, а пружины с жесткостью c_3 соединяют углы частиц.

Энергия соединения i -го узла частицы p и j -го узла частицы q в нелинейном варианте определяется соотношением

$$E_{(p,i)(q,j)} = (C_k / 2)(L_1 - L_0)^2, \quad (1)$$

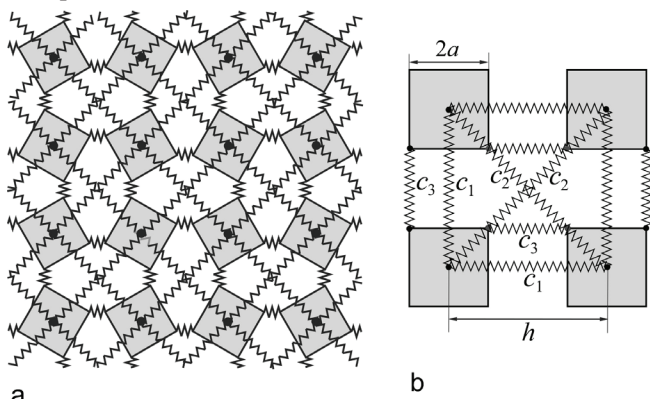


Рис. 1. (а) Структурная модель материала на основе частиц конечного размера. (б) Ячейка и обозначения параметров материала, рассматриваемого в настоящей статье.

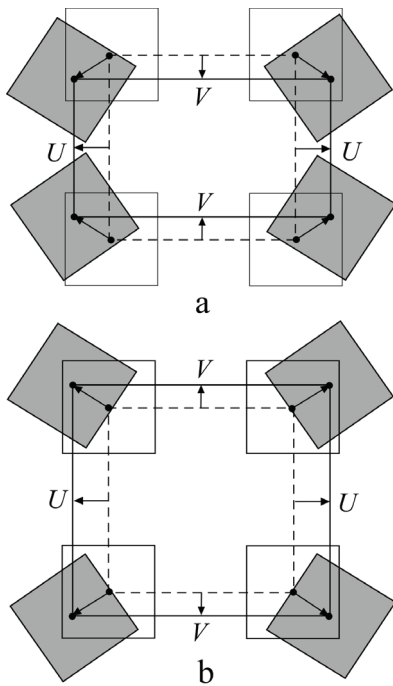


Рис. 2. (а) Деформирование обычной ячейки при растяжении на величину U . (б) Деформирование ячейки с ауксетическими свойствами.

где L_0 и L_1 - длина соединения до и после деформации, C_k - приведенная жесткость соединения, равная отношению жесткости c_k к квадрату исходной длины ($C_k = c_k/L_0^2, k = 1, 2, 3$).

Линеаризуя в (1) выражение $L_1 - L_0$, для малых компонент вектора смещения u, v и вращения ϕ , получаем

$$E_{(p,i)(q,j)} = \frac{1}{2} C \left[(U_q - U_p) \cos \gamma + (V_q - V_p) \sin \gamma + r_i \phi_p \sin(\gamma_i - \gamma) - r_j \phi_q \sin(\gamma_j - \gamma) \right]^2, \quad (2)$$

где r_i, r_j - длины радиус-векторов, проведенных от центров масс частиц до узлов, γ_i, γ_j - углы между осью Ox и этими радиус-векторами, а γ - угол наклона соединения к оси Ox .

3. Анализ ауксетических свойств простейшей ячейки

Рассматриваем ячейку, состоящую из 4 частиц (рис. 1б). Решаем задачу нахождения поперечных смещений V и поворотов ϕ частиц ячейки при ее растяжении на величину U в горизонтальном направлении (рис. 2).

Используя потенциал (2), суммированием по соединениям строим потенциальную энергию системы и далее на основе вариационного принципа получаем 12 алгебраических уравнений статики. С учетом симметрии деформирования ячейки (рис. 2) сокращаем количество уравнений до трех. В случае $a \neq 0, C_3 \neq 0$, учитывая, что перемещение U задано, из уравнений статики для вертикального направления и вращений

$$2C_1V + C_2(U + V) + 2C_3(V + a\phi) = 0, \quad (3)$$

$$[(U + V) + 2a\phi] aC_3 = 0$$

находим выражения изменения толщины ячейки V в вертикальном направлении и характеристик поворотов частиц через перемещение U :

$$V = -\nu U, \quad \nu = \frac{C_2 - C_3}{2C_1 + C_2 + C_3}, \quad (4)$$

$$\phi = -\frac{C_1 + C_3}{2C_1 + C_2 + C_3} \frac{U}{a}.$$

Описанные преобразования для получения решения громоздки, но стандартны. С использованием методики и алгоритма метода конечных элементов они были реализованы в системе символьной математики Maple и аналитическое решение было построено с использованием компьютера.

В решении (4) введен аналог коэффициента Пуассона ν континуальной теории.

Для иллюстрации на рис. 2 представлены два качественно разных случая деформирования ячейки. Нарисованы частицы ячейки в исходном (центры соединены пунктиром) и деформированном (центры соединены сплошной линией) состояниях.

Из второго равенства (4) следует, что при $C_2 > C_3$ коэффициент Пуассона положителен $\nu > 0$. В этом случае при растяжении системы частиц в горизонтальном направлении система сжимается в поперечном направлении (рис. 2а).

Если $C_2 < C_3$, то $\nu < 0$. В этом случае при растяжении в горизонтальном направлении система частиц сжимается в поперечном направлении (рис. 2б), то есть материал проявляет ауксетические свойства.

В случае $C_2 = C_3$ или при $C_1 \rightarrow \infty$ коэффициент Пуассона равен нулю, и при растяжении система не изменяет толщину.

Отметим, что $\nu \rightarrow +1$ при $C_2 \rightarrow \infty$ и $\nu \rightarrow -1$ при $C_3 \rightarrow \infty$. Таким образом, коэффициент Пуассона изменяется в пределах $-1 < \nu < 1$, допустимых для плоской упругой изотропной среды (в трехмерном случае действуют ограничения $-1 < \nu < 0.5$).

Отметим также, что из второго уравнения системы (3), которое является уравнением для поворотов, видно, что для частиц нулевого размера ($a = 0$) и при отсутствии пружин, соединяющих углы частиц ($C_3 = 0$), имеем повороты произвольной величины, что согласуется с физическими представлениями о деформировании такой ячейки. Эти случаи соответствуют обычной решетке, для которой коэффициент Пуассона всегда положителен. Таким образом, для рассматриваемой системы конечность размера и вращения частиц существенны для появления у материала ауксетических свойств [13].

4. Сжатие ячейки между частицами

Представляет интерес получение аналитических решений и анализ проявления ауксетических свойств при внедрении в ячейку сторонних частиц.

Рассмотрим внедрение сжимающими силами F симметрично расположенных частиц клиновидной формы в ячейку, представленную на рис. 1b. Внедрение частиц клиновидной формы часто встречается на практике. Отметим, что в более общем случае внедрения осесимметричных частиц, при малых перемещениях поверхность можно рассматривать не как криволинейную, а аппроксимировать ее прямыми гранями, так что решаемая задача, по-видимому, даст оценочные результаты и для этого более общего случая.

На рис. 3 частицы недеформированной ячейки и фрагмент сжимающей частицы нарисованы пунктирными линиями. Считаем, что грани частицы наклонены под одинаковым углом α . В недеформированном состоянии частица внедрена настолько, что касается центров частиц ячейки, так что расстояние между гранями на этом уровне равно расстоянию h между центрами частиц ячейки.

Рассматриваем малые внедрения, такие что при их анализе может быть использована линейная модель. Система в деформированном состоянии нарисована сплошными линиями. Для наглядности центры частиц ячейки в недеформированном и деформированном состояниях соединены пунктирными и сплошными линиями.

Считаем, что грани внедряемой частицы действуют на центры частиц ячейки, которые скользят по граням. Учитывая симметрию, для такой задачи может быть построено аналитическое решение. Для компоненты U перемещения правых частиц ячейки получаем выражение

$$U = \frac{F}{8} \frac{2 \sin \alpha C_1 + (\sin \alpha + \cos \alpha) C_2 + (\sin \alpha - \cos \alpha) C_3}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_3) \cos \alpha}.$$

Отметим, что, если грани горизонтальны ($\alpha = 0$), то центры частиц ячейки смещаются вдоль них на величину

$$U = \frac{F}{8} \frac{C_2 - C_3}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_3)}.$$

Из этого соотношения видно, что при параметрах $C_3 > C_2$ сжимаемая ячейка сжимается под частицей ($U < 0$), то есть демонстрирует свойство ауксетичности, и расширяется ($U > 0$) в случае, если $C_3 < C_2$. Такой результат согласуется с результатами раздела 3.

Для граней с малым наклоном $\alpha < \pi/4$ также существуют параметры, при которых ячейка обладает обычным свойством расширяться под внедряющейся сжимающей ее частицей (рис. 3a), однако ячейки, у которых

$$C_3 > \frac{2 \sin \alpha C_1 + (\sin \alpha + \cos \alpha) C_2}{\cos \alpha - \sin \alpha},$$

обладают ауксетическим свойством сжиматься под сближающимися частицами (рис. 3b).

При увеличении угла наклона граней достичь ауксетического поведения ячейки становится все сложнее. При $\alpha \rightarrow \pi/4$ жесткость C_3 необходимо бесконечно

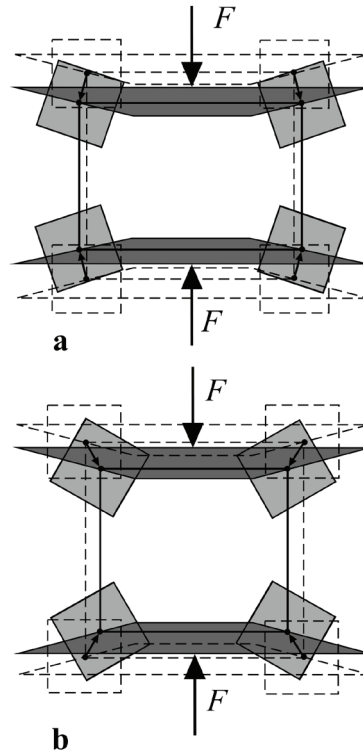


Рис. 3. (a) Обычный эффект расклинивания ячейки при внедрении частицы. Ячейка при проникновении частицы расширяется. (b) Деформирование ячейки с ауксетическими свойствами. Ячейка под частицей сжимается.

увеличивать $C_3 \rightarrow \infty$. Интересно отметить, что для острого клина с углом наклона граней $\alpha > \pi/4$ компоненты $U > 0$ при любых жесткостях, то есть при таких углах рассматриваемая ячейка обладает обычным свойством расширяться в поперечном направлении при сжатии (острая частица расклинивает ячейку) при любых параметрах жесткостей ячейки.

5. Анализ особенностей деформирования ауксетической решетки под нагрузкой. Вычислительный эксперимент

Отмеченный в разделе 4 эффект сгущения под внедрением может быть продемонстрирован и для решетки.

Рассматриваем слой материала, расположенного на гладкой плоскости. На частицы верхней поверхности действуют сжимающие силы. Задача решается численно. На рис. 4 исходная решетка представлена пунктирными линиями, а деформированная – сплошными, показаны смещения и повороты частиц в деформированном состоянии.

На рис. 4a представлен результат расчета для обычного материала, у которого $C_3 = 0$. В этом случае вращение частиц отсутствует. Материал расступается под нагрузкой.

На рис. 4b представлен результат расчета для материала с ауксетическими свойствами. Материал уплотняется под нагрузкой.

Отметим, что вращение частиц имеет коротковолновый характер. То есть обычная континуальная модель Коссера не может быть использована для получения аппроксимационных аналитических или численных реше-

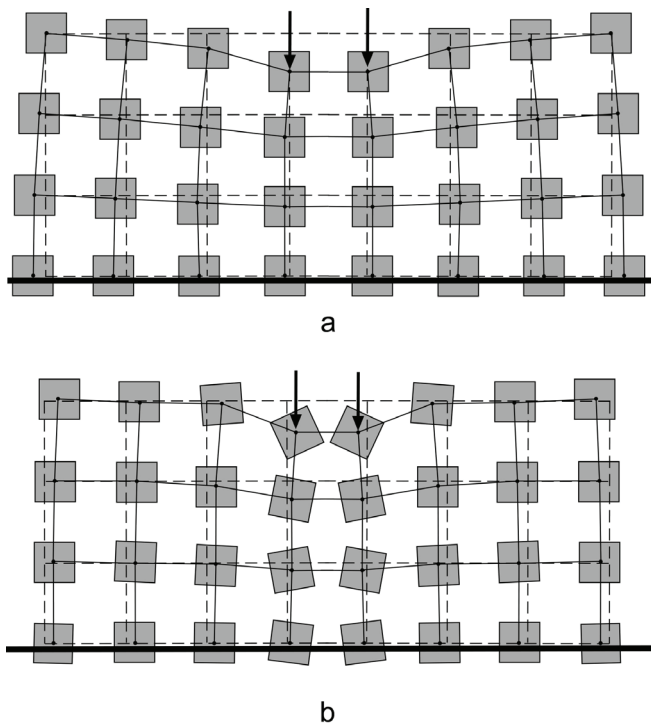


Рис. 4. (а) Обычное свойство материала расширяться под нагрузкой. (б) Интересное особое свойство рассматриваемой аруксетической решетки сжиматься (сгущаться) под нагрузкой.

ний и необходимо использовать модель Коссера много-полевого типа [2, 3, 14, 15].

Заключение

В статье приведены результаты аналитического и численного исследования особенностей поведения простейшей ячейки и решетки, рассмотренной ранее в статьях [2, 3, 13-15]. Демонстрируется и исследуется интересный эффект сгущения частиц сжимаемого материала под проникающими в него частицами и сдавливающей нагрузкой. Такой эффект может представлять интерес при проектировании материалов и систем, противодействующих внедрениям и улавливающих частицы.

Дальнейшее изучение особенностей поведения решеток Коссера [13-16, 18, 19], изделий из материалов с аруксетическими свойствами, а также с хиральной микроструктурой [16] представляет на наш взгляд интерес.

Литература

1. V.N. Belomestnykh, E.G. Soboleva. Letters on materials **1**(2), 84 (2011) [Беломестных В.Н., Соболева Э.Г. Письма о материалах **1**(2), 84-87 (2011).]
2. S.V. Dmitriev, A.A. Vasiliev, A.E. Miroshnichenko, T.

- Shigenari, Y. Kagawa, Y. Ishibashi. *Ferroelectrics* **283**, 127 (2003).
3. S.V. Dmitriev, A.A. Vasiliev, N. Yoshikawa, T. Shigenari, Y. Ishibashi. *Physica Status Solidi (B): Basic Solid State Physics* **242**, 528 (2005).
4. M.R. Dudek, B. Grabiec, K.W. Wojciechowski. *Reviews on Advanced Materials Science* **14**(2), 167 (2007)
5. R.V. Goldstein, V.A. Gorodtsov, D.S. Lisovenko. *Letters on Materials* **1**(3), 127-132 (2011) [Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Письма о Материалах **1**(3), 127 (2011).]
6. R.V. Goldstein, V.A. Gorodtsov, D.S. Lisovenko. *Letters on Materials* **2**(1), 21 (2012) [Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Письма о Материалах **2**(1), 21 (2012).]
7. R.V. Goldstein, V.A. Gorodtsov, D.S. Lisovenko. *Letters on Materials* **3**(1), 7 (2013) [Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Письма о Материалах **3**(1), 7 (2013).]
8. J.N., Grima, K.E. Evans. *Journal of Materials Science Letters* **19**(17), 1563 (2000).
9. J.N. Grima, R. Gatt, A. Alderson, K.E. Evans. *Journal of the Physical Society of Japan* **74**(10), 2866 (2005)
10. J.N. Grima, P.-S. Farrugia, R Gatt., D. Attard. *Physica Status Solidi (B): Basic Solid State Physics* **245**(3), 521 (2008).
11. Y. Ishibashi, M. Iwata. *Journal of the Physical Society of Japan* **69**(8), 2702 (2000).
12. R. S. Lakes, K. W. Wojciechowski. *Physica Status Solidi (B): Basic Solid State Physics* **245**(3), 545-551 (2008).
13. A.A. Vasiliev, S.V. Dmitriev, Y. Ishibashi, T. Shigenari. *Physical Review B* **65**, 094101 (2002).
14. A.A. Vasiliev, S.V. Dmitriev, A.E. Miroshnichenko. *International Journal of Solids and Structures* **42**(24-25), 6245 (2005).
15. A.A. Vasiliev, S.V. Dmitriev, A.E. Miroshnichenko. *International Journal of Solids and Structures* **47**(3-4), 510 (2010).
16. A.A. Vasiliev, S.V. Dmitriev, I.S. Pavlov. *Advanced materials* **12**, 87-91 (2011) (in Russian) [Васильев А.А., Дмитриев С.В., Павлов И.С. Перспективные материалы **12**, 87 (2011).]
17. K.W. Wojciechowski. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36**(47), 11765 (2003).
18. I.S. Pavlov, A.I. Potapov. *Doklady Akademii nauk* **421**(3), 348-352 (2008) (in Russian) [Павлов И.С., Потапов А.И. Доклады Академии наук **421**(3), 348-352 (2008)].
19. I.S. Pavlov, A.I. Potapov. *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela* (2), 98 (2007). (in Russian) [Павлов И.С., Потапов А.И. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела (2), 98 (2007)].