

Взаимодействие солитонов в дискретных РТ симметричных системах без потенциала Пайерлса-Набарро

Сучков С.В.^{1,†}, Кхаре А.²

[†]sergey.v.suchkov@gmail.com

¹Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, ул. Халтурина 39, Уфа 450001

²Indian Institute of Science Education and Research, Pune, Maharashtra 411021, Индия

Soliton collision in discrete PT-symmetric systems without Peierls-Nabarro potential

S.V. Suchkov¹, A. Khare²

¹Institute for Metals Superplasticity Problems RAS, Khalturin St. 39, 450001 Ufa

²Indian Institute of Science Education and Research, Pune, Maharashtra 411021, India

Рассматривается дискретная модель, описывающая систему волноводов с притоком и оттоком энергии, допускающая точные решения в виде волн солитонного типа. Показано существование солитонов двух типов – высокочастотного и низкочастотного и исследована динамика взаимодействия солитонов как одного типа, так и разных типов. Установлено, что солитоны одного типа взаимодействуют абсолютно упруго, в то время как результат взаимодействия солитонов разного типа существенно зависит от начальных условий.

Ключевые слова: РТ – симметричные системы, солитон, РТ – симметричный каплер, нелинейное уравнение Шредингера, потенциал Пайерлса-Набарро.

Discrete model describing a waveguide array with energy gain and loss that admits exact solitary wave solutions was considered. Existence of two types of solitons, namely, the high-frequency and the low-frequency ones was demonstrated. Collisions between similar and dissimilar solitons were investigated. It was found that solitons of the same type interact elastically, while for dissimilar solitons the collision outcome significantly depends on the initial conditions.

Keywords: PT-symmetric systems, soliton, PT-symmetric coupler, nonlinear Schrödinger equation, Peierls-Nabarro potential.

1. Введение

Известно, что системы с неэрмитовым гамильтонианом могут обладать полностью вещественным спектром, если они удовлетворяют так называемому свойству РТ (parity-time) –симметрии [1-2]. Такие системы могут быть построены в оптике, в частности, к ним относятся оптоволокна с притоком и оттоком энергии. Данные системы открывают новые возможности в формировании оптических сигналов и управлении ими, дают возможность усиливать сигналы, что необходимо для их передачи на большие расстояния.

В работах [3-5] рассматривались системы взаимосвязанных волноводах с притоком и оттоком энергии. Были построены решения солитонного типа, исследована их устойчивость и динамика. В данной работе ставится задача изучение взаимодействия солитонов в аналогичной модели. Известно, что в большинстве случаев дискрет-

ные системы обладают потенциалом Пайерлса-Набарро (пПН), что снижает подвижность сигналов в таких системах. В работах [6-10] было показано, что, в некоторых случаях, можно модифицировать дискретную модель таким образом, что континуальный предел остается неизменным, но для нее становится возможным построить точные решения. В таких моделях отсутствует пПН, и такая модификация системы позволяет изучить динамику взаимодействия солитонов более точно, поскольку, располагая точным решением, легко задать начальные условия, описывающие движущиеся солитоны, и, кроме того, солитоны в таких системах двигаются, не излучая энергию.

Взаимодействию солитонов в неинтегрируемых системах посвящено большое количество работ (см. [11-15] и список литературы в этих работах). Обычно в данных исследованиях обсуждается степень неупругости солитонных столкновений, зависимость результата

столкновения от разности фаз солитонов, фрактальное рассеяние солитонов. В данной работе мы показываем, что степень упругости столкновений так же может зависеть и от типа сталкивающихся солитонов в случае когда рассматриваемая система поддерживает солитонные решения разных типов.

2. Описание модели

В работе рассматривается модель линейно связанных пар волноводов с притоком и оттоком энергии, называемых РТ - симметричными каплерами. Схематическое изображение модели дано на рис. 1. В волноводах, отмеченных черным цветом, происходит приток энергии, а белым цветом - отток. Параметр C отвечает за жесткость связи между каплерами, при этом жесткость связи внутри каждого каплера, не ограничивая общности, принята за единицу, $|u_n|^2$ и $|v_n|^2$ - интенсивности света в волноводах n -го каплера.

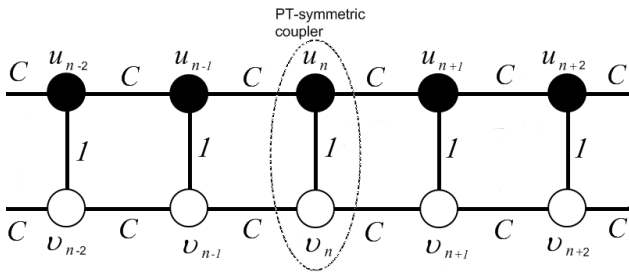


Рис. 1. Схема модели: поперечное сечение системы волноводов. C - жесткость связи между каплерами, $|u_n|^2$ и $|v_n|^2$ - интенсивность света в волноводах n -го каплера. Черным цветом изображены волноводы с притоком энергии, белым - с оттоком.

Для описания представленной модели используется система нелинейных уравнений Шрёдингера с кубической нелинейностью типа Абловица-Ладика:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial z} &= \rho u_n + i v_n + i |u_n|^2 \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} + i C(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n), \\ \frac{\partial v_n}{\partial z} &= -\rho v_n + i u_n + i |v_n|^2 \frac{v_{n-1} + v_{n+1}}{2} + i C(v_{n-1} + v_{n+1} - 2v_n). \end{aligned} \quad (1)$$

При достаточно большом C солитонное решение уравнения (1) может быть получено приближенно, используя континуальный аналог уравнения (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \rho u + i v + i |u|^2 u + i \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\rho v + i u + i |v|^2 v + i \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Данный метод использовался в работе [4], где исследовалась аналогичная дискретная модель с керровской нелинейностью. Модель с керровской нелинейностью более реалистична, однако для модели (1) с нелинейно-

стью типа Абловица-Ладика возможно построение точного движущегося решения солитонного типа. В этой модели отсутствует потенциал Паейрлса-Набарро, что делает её более удобной для изучения столкновения солитонов.

Искомое солитонное решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_n &= A \operatorname{sech} [\beta(n - vz + \delta_1)] e^{i(\omega z - kn + \delta_2 + \frac{\theta}{2})}, \\ v_n &= A \operatorname{sech} [\beta(n - vz + \delta_1)] e^{i(\omega z - kn + \delta_2 - \frac{\theta}{2})}, \end{aligned} \quad (2)$$

где A - амплитуда, v - скорость, β - ширина, k - волновым число, ω - частота и δ_1, δ_2 - произвольные сдвиги фаз. Данные параметры связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} A^2 &= 2C \sinh \beta^2, \quad \beta v = -2C \sin k \sinh \beta, \quad \sin \theta = -\rho, \\ \omega &= \cos \theta - 2C[1 - \cos k \cosh \beta]. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, для фиксированных значений параметров модели и выбранных значениях амплитуды A и ширины β можно получить решения со скоростью v из интервала

$$|v| \leq \sqrt{2C} A \beta, \quad (4)$$

и с соответствующей частотой ω . Отметим, что

$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \rho^2}$. Будем называть солитон высокочастотным с $\cos \theta = -\sqrt{1 - \rho^2}$ и частотой

$$\omega_h = -\sqrt{1 - \rho^2} - 2C[1 - \cos k \cosh \beta], \quad (5)$$

и низкочастотным с $\cos \theta = \sqrt{1 - \rho^2}$ и частотой

$$\omega_l = \sqrt{1 - \rho^2} - 2C[1 - \cos k \cosh \beta]. \quad (6)$$

Как будет показано далее, взаимодействие солитонов разных типов существенно отличается от взаимодействия солитонов одного типа.

3. Численный эксперимент

При взаимодействии солитоны могут обмениваться энергией, либо, поскольку рассматриваемая система обладает притоком и оттоком энергии, может происходить изменение суммарной энергии системы. Поэтому главной характеристикой при изучении столкновения солитонов будет величина энергии солитонов после взаимодействия в сравнении с их энергиями до взаимодействия. Как было показано в работах [4,11,12], взаимодействие солитонов зависит от их разности фаз, поэтому мы исследуем зависимость суммарной энергии двух солитонов после взаимодействия как функцию разности фаз. В результате эксперимента было установлено, что солитоны одного типа взаимодействуют абсолютно упруго, т.е. после взаимодействия они восстанов-

ливают свою первоначальную форму и энергию и продолжают движение с начальной скоростью. На рис. 2 приведен пример взаимодействия двух высокочастотных солитонов со следующими значениями параметров: для солитона, движущегося слева направо, $A=0,5$, $v=1$ ($k=-0,51$), а для солитона, движущегося справа на лево, $A=0,8$, $v=-2$ ($k=1,878$). Параметры модели $\rho=0,5$, $C=1$. Более ярким цветом цвет изображены области с более высокой интенсивностью. На (а) показано $|u_n|^2$, а на (б) $|v_n|^2$.

Отметим, что в случае взаимодействия солитонов одного типа $|u_n|^2 = |v_n|^2$, и разность фаз солитонов не влияет на степень упругости взаимодействия.

Взаимодействие низкочастотных солитонов качественно не отличается от взаимодействия высокочастотных солитонов, они также являются упругими для всех значений разности фаз.

Далее изучалась динамика взаимодействия солитонов двух разных типов – высокочастотного с низкочастотным. После взаимодействия солитонов разного типа происходит изменение их формы, энергия периодически перераспределяется между волноводами в каплях, т.е., вообще говоря, $|u_n|^2 \neq |v_n|^2$, наблюдаются эффекты усиления или ослабления общей интенсивности, так же могут порождаться новые световые импульсы. На рис. 3 приведен пример такого взаимодействия.

Динамика взаимодействия солитонов разного типа очень сложна для анализа и будет рассмотрена в другой работе. Здесь же мы остановимся несколько более подробно на анализе частного случая взаимодействия солитонов одинаковой амплитуды и скорости. Поскольку после взаимодействия солитоны приобретают структуру, в которой в каждом капле происходит периодический обмен энергиями между волноводами, суммарная энергия солитонов является также периодической во времени величиной. Поэтому будем оценивать среднюю по времени величину интенсивности солитонов. Отметим, что при фиксированных значениях амплитуды и скорости солитона, при заданных параметрах модели, существует два высокочастотных и два низкочастотных солитона с

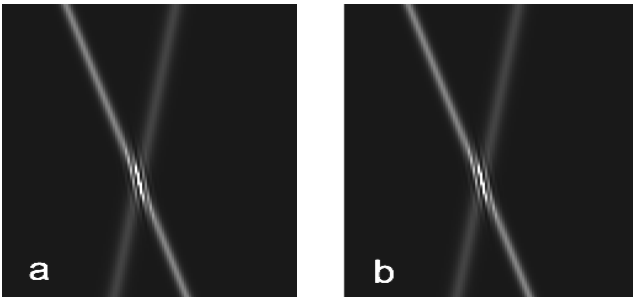


Рис. 2. Динамика взаимодействия двух высокочастотных солитонов. Параметры солитонов: $A=0,5$, $v=1$ ($k=-0,51$), $\omega_h=-1,02$ для солитона, движущегося с левой стороны; $A=0,8$, $v=-2$ ($k=1,878$), $\omega_h=-3,56$ для солитона, движущегося с правой стороны. $\rho=0,5$, $C=1$. Более яркий цвет на рисунки соответствует более высокой амплитуде солитона. На (а) представлена интенсивность света $|u_n|^2$, на (б) $|v_n|^2$.

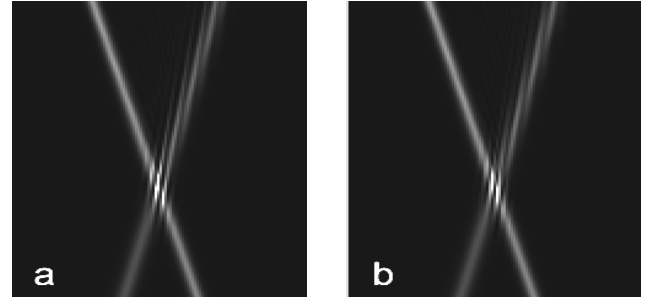


Рис. 3. Взаимодействие высокочастотного солитона с $A=0,5$, $v=1,5$ ($k=-0,83$) с низкочастотным солитоном с $A=0,7$, $v=1,7$ ($k=0,96$). Параметры модели: $\rho=0,5$, $C=1$. На (а) представлена интенсивность света $|u_n|^2$, на (б) $|v_n|^2$.

$$k = -\arcsin\left(\frac{\beta v}{A\sqrt{2C}}\right) \text{ и } k = -\pi + \arcsin\left(\frac{\beta v}{A\sqrt{2C}}\right),$$

где β определяется из (3).

На рис. 4 представлены усредненные по времени интенсивности солитонов после взаимодействия для левого,

$$I_l = \sum_{n=1}^{n=N/2} |u_n|^2 + |v_n|^2,$$

и правого,

$$I_r = \sum_{n=N/2+1}^{n=N} |u_n|^2 + |v_n|^2,$$

солитонов, как функция их разности фаз δ . Сплошной линией изображена интенсивность солитона движущегося справа налево (низкочастотный солитон), пунктиром – слева направо (высокочастотный солитон). Отметим, что начальная разность фаз - величина относительная, поскольку взаимодействующие солитоны обладают разной частотой ω , и их разность фаз при столкновении зависит от расстояния, которое проходят солитоны до момента столкновения. Однако, варьируя начальную разность фаз от 0 до 2π можно перебрать все возможные варианты. Параметры модели $C=1$, $\rho=0,5$, параметры солитонов $A=0,5$, $|v|=1,5$. Пусть k_1 волновое

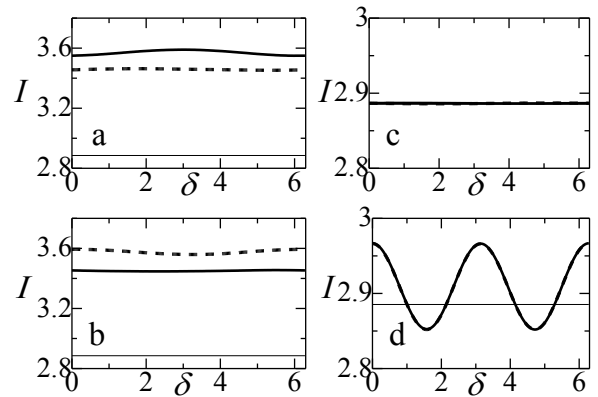


Рис. 4. Результат взаимодействия высокочастотного солитона с низкочастотным, представленный зависимостью осредненной по времени интенсивности солитонов как функции их разности фаз. Параметры модели $C=1$, $\rho=0,5$. Параметры солитонов $A=0,5$, $|v|=1,5$, (а) $k_1=-0,83$, $k_2=0,83$, (б) $k_1=-2,3$, $k_2=2,3$, (с) $k_1=-0,83$, $k_2=2,3$, (д) $k_1=-2,3$, $k_2=0,83$. Сплошной линией (пунктиром) изображена интенсивность низкочастотного (высокочастотного) солитона после столкновения как функция начальной разности фаз δ . Тонкая сплошная линия показывает уровень начальной энергии каждого из солитонов.

число высокочастотного солитона, k_2 – низкочастотного. На (а) изображен случай $k_1=-0,83$, $k_2=0,83$, на (b) $k_1=-2,3$, $k_2=2,3$, на (c) $k_1=-0,83$, $k_2=2,3$, на (d) $k_1=-2,3$, $k_2=0,83$.

Из рис. 4 можно заключить, что начальная разность фаз слабо влияет на перераспределение энергии между солитонами, а так же на суммарную энергию всей системы, что можно было бы ожидать по аналогии с работами [4,11,12]. Интересным фактом является то, что перераспределение энергии между солитонами отсутствует в случае $k_2-k_1=\pi$. Отметим, что в случаях (а), (b) происходит усиление обоих солитонов, в случае (d) наблюдается незначительное усиление или ослабление в зависимости от разности фаз, а в случае (c) энергия солитонов не изменяется.

4. Заключение

В данной работе рассмотрена модель системы волноводов, обладающая РТ – симметричным потенциалом, допускающая точные решения. Потенциал Пайерлса-Набарро для неподвижных солитонов в данной системе оказывается в точности равным нулю. Получено точное решение, описывающее движущийся солитон. Показано, что два солитона одного типа взаимодействуют абсолютно упруго, не зависимо от параметров модели и параметров самих солитонов. Динамика взаимодействия солитонов разного типа существенно сложнее, и для солитонов одинаковой амплитуды и скорости, для определенного набора параметров модели и параметров солитонов, численно изучена зависимость перераспределения энергии между солитонами после их взаимодействия в зависимости от разности начальных фаз. В последующих работах предполагается построение приближенного решения, описывающего солитоны с периодическим изменением их полной энергии.

Полученные результаты показывают, что системы волноводов с РТ-симметричными элементами с притоком и оттоком энергии демонстрируют ряд новых эффектов по сравнению с консервативными системами. Методика данного исследования может быть использована при решении различных материаловедческих проблем.

Литература

1. C.M. Bender and S. Boettcher. Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).
2. C. M. Bender. Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
3. S.V. Dmitriev, S.V. Suchkov, A.A. Sukhorukov, Yu.S. Kivshar. Phys. Rev. A **84**, 013833 (2011).
4. S.V. Suchkov, B.A. Malomed, S.V. Dmitriev, Yu.S. Kivshar. Phys. Rev. E **84**, 046609 (2011).
5. S.V. Dmitriev, A.A. Sukhorukov, and Yu.S. Kivshar. Opt. Lett. **35**, 2976–2978 (2010).
6. S.V. Dmitriev, P.G. Kevrekidis, A. Khare, A.J. Saxena. Physics A: Math. Theor. **40**, 6267 (2007).
7. S.V. Dmitriev, N. Yoshikawa, P.G. Kevrekidis. J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 7217 (2006).
8. I. Roy, P.G. Kevrekidis, A. Saxena, S.V. Dmitriev. Phys. Rev. E **76**, 026601 (2007).
9. S.V. Dmitriev, P.G. Kevrekidis, A.A. Sukhorukov, N. Yoshikawa, S. Takeno. Phys. Lett. A **356**, 324 (2006).
10. P.G. Kevrekidis, S.V. Dmitriev, A.A. Sukhorukov. Mathematics and Computers in Simulation **74**, 343 (2007).
11. S.V. Dmitriev, D.A. Semagin, T. Shigenari, A.A. Sukhorukov. Phys. Rev. E **66**, 046609 (2002).
12. S.V. Dmitriev, T. Shigenari. Chaos. **12**, 324 (2002).
13. S.V. Dmitriev, Y.S. Kivshar, T. Shigenari. Phys. Rev. E **64**, 056613 (2001).
14. S.V. Dmitriev, P.G. Kevrekidis, B.A. Malomed, D.J. Frantzeskakis. Phys. Rev. E **68**, 566031 (2003).
15. S.V. Dmitriev, P.G. Kevrekidis, Yu.S. Kivshar. Phys. Rev. E **78**, 046604 (2008).