

The dynamics of 360° domain walls in weak ferromagnets in autoresonant mode

I.R. Kayumov[†], E.S. Shikhovtseva, V.N. Nazarov

[†]kayumovir@mail.ru

Institute of Molecule and Crystal Physics Ufa Research Center of RAS, 151 Pr. Oktyabrya St., Ufa, Russia, 450075

The magnet remains even when small portions of saturated previous domains, for example in the form of 360-degree walls. These domain walls in the center of which the magnetization is antiparallel to the external magnetic field, can serve as nuclei of magnetization reversal. Localized in the space of magnetic inhomogeneity in the form of a dynamic 360-degree domain walls are two-soliton formation of strongly interacting two 180-degree domain walls. In dynamic mode, the 360-degree domain wall has internal degrees of freedom associated with the motion of its constituent of 180° with respect to the walls of the system center. This work is devoted to the study of the generation of high-nonlinear oscillations 360-degree domain wall of a small-amplitude alternating field in anisotropic ferromagnets in autoresonant easy-plane mode. It was found that in weak ferromagnets can increase the width of the oscillation amplitude of 360° domain walls. It is shown that the dynamic stability and full control of the nonlinear dynamics of domain walls by alternating fields of low amplitude can be achieved by modulating the frequency of the pump field. Form steady nonlinear oscillations 360-degree domain wall is determined by the form of the function that defines the modulation frequency of the pump field.

Keywords: magnetic domain walls, solitons, autoresonance.

Динамика 360-градусных доменных стенок в слабых ферромагнетиках в режиме авторезонанса

Каюмов И.Р.[†], Шиховцева Е.С., Назаров В.Н.

[†]kayumovir@mail.ru

Институт физики молекул и кристаллов УНЦ РАН, ул. пр.Октября 151, 450075, Уфа, Россия

В последние годы нелинейная динамика намагниченности магнетиков, проанализированная под углом зрения «солитонной науки» вызывает у исследователей все больший интерес. С точки зрения фундаментальной науки исследование структуры и динамики уединенных магнитных неоднородностей вблизи точки фазового перехода представляет несомненный интерес для понимания природы предпереходных процессов, происходящих на этапе, предшествующем образованию зародыша в виде домена новой фазы. В магнетике даже при насыщении остаются небольшие участки прежних доменов, например, в виде 360-градусных стенок. Эти доменные стенки, в центре которых намагниченность антипараллельна внешнему магнитному полю, могут служить зародышами перемагничивания. Локализованные в пространстве магнитные неоднородности в виде динамической 360-градусной доменной стенки представляют собой двухсолитонное образование из двух сильно взаимодействующих 180-градусных доменных стенок. В динамическом режиме 360-градусная доменная стенка обладает внутренними степенями свободы, связанными с возможностью движения образующих ее 180-градусных стенок относительно центра системы. К настоящему времени хорошо разработаны математические основы авторезонанса в колебательных системах при отсутствии затухания. Влияние затухания слабо изучено. Явление авторезонанса в магнетиках остается слабо изученным. Данная работа посвящена изучению генерации высокоамплитудных нелинейных колебаний 360-градусной доменной стенки переменным полем малой амплитуды в анизотропных легкоплоскостных ферромагнетиках в режиме авторезонанса. Установлено, что в слабых ферромагнетиках в режиме авторезонанса возможен рост амплитуды колебаний ширины 360-градусной доменной стенки. Показано, что динамическая стабильность и полное управление нелинейной динамикой доменных стенок переменными полями небольшой амплитуды могут быть достигнуты модулированием частоты поля накачки. Форма установившихся нелинейных колебаний 360-градусной доменной границы определяется видом функции, задающей модуляцию частоты поля накачки.

Ключевые слова: магнитные доменные стенки, солитоны, авторезонанс.

1. Введение

В последние годы нелинейная динамика намагниченности магнетиков, проанализированная под углом зрения «солитонной науки» вызывает у исследователей все больший интерес (см., например, [1 – 11, 17 – 20]). С точки зрения фундаментальной науки исследование структуры и динамики уединенных магнитных неоднородностей вблизи точки фазового перехода представляет несомненный интерес для понимания природы предпериодных процессов, происходящих на этапе, предшествующем образованию зародыша в виде домена новой фазы.

В редкоземельных ортоферритах вдали от точки фазового перехода первого рода доменные стенки, ограничивающие домен новой фазы, являются 180-градусными [12]. При этом вектор антиферромагнетизма \mathbf{l} в доменной стенке колеблется в (ac) – плоскости кристалла. Две сильно взаимодействующие 180-градусные стенки могут образовывать как нуль-градусную, так и 360-градусную доменную границу. В магнетике даже при насыщении остаются небольшие участки прежних доменов в виде 360-градусных стенок [12]. Эти доменные стенки, в центре которых намагниченность антипараллельна внешнему магнитному полю, могут служить зародышами перемагничивания. Локализованные в пространстве магнитные неоднородности в виде динамической 360-градусной доменной стенки представляют собой двухсолитонное образование. В динамическом режиме 360-градусная доменная стенка обладает внутренними степенями свободы, связанными с возможностью движения образующих ее 180-градусных стенок относительно центра системы [3].

Систематическое исследование математических моделей авторезонанса, представимых в форме дифференциальных уравнений, началось с работы Фридлянда и Меерсона [13]. К настоящему времени хорошо разработаны математические основы авторезонанса в колебательных системах при отсутствии затухания [14, 15]. Влияние затухания слабо изучено [16]. Явление авторезонанса в магнетиках остается слабо изученным [17 – 20].

Настоящая работа посвящена изучению генерации высокоамплитудных нелинейных колебаний 360-градусной доменной стенки переменным полем в слабых ферромагнетиках при наличии диссипации в режиме авторезонанса. Возникающий таким образом резонанс, удерживаемый в течение долгого времени, может приводить к значительному изменению амплитуды колебаний и энергии системы даже прималой амплитуде внешнего поля.

2. Постановка задачи. Уравнение движения

Рассмотрим слабоферромагнитный образец, вырезанный перпендикулярно оси \mathbf{c} . В дальнейшем полагаем, что направление осей декартовой системы координат (x, y, z) совпадают с направлениями кристаллографических осей (a, b, c) . Магнитное поле полагаем равным $\mathbf{H} = (0, 0, -H)$.

Для записи уравнения движения используем лагранжево-формализм. Функция Лагранжа слабо ферромагнетика ромбической симметрии, записанная только через вектор антиферромагнетизма \mathbf{l} , имеет вид [21 – 23]

$$L = \frac{\chi_{\perp}}{2\gamma^2} \dot{\mathbf{l}}^2 - \frac{2\chi_{\perp}}{\gamma} \mathbf{H}[\mathbf{l}] - \frac{1}{2} A \left[\left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z} \right)^2 \right] - F_a + M_c l_x H_z, \quad (1)$$

где F_a – энергия магнитной анизотропии определяется следующим образом

$$F_a = -\frac{1}{2} \tilde{K}_{ab} l_x^2 - \frac{1}{2} \tilde{K}_{bc} l_z^2 + \frac{1}{4} (K_2^{(11)} l_x^4 + K_2^{(13)} l_x^2 l_z^2 + K_2^{(33)} l_z^4). \quad (2)$$

Здесь χ_{\perp} – перпендикулярная восприимчивость; γ – гиромагнитное отношение, A – константа неоднородного обменного взаимодействия, \tilde{K}_{ab} , \tilde{K}_{bc} , $K_2^{(ij)}$ – эффективные константы магнитной анизотропии; M_c – величина слабоферромагнитного момента \mathbf{m} в двух-подрешеточной модели антиферромагнетика вдоль \mathbf{c} -оси кристалла.

В случае $\tilde{K}_{bc} > 0$ намагниченности подрешеток \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 в доменной стенке поворачиваются в (ac) -плоскости кристалла (доменная стенка (ac) -типа), а при $\tilde{K}_{bc} < 0$ – в (ab) -плоскости (доменная стенка (ab) -типа) [24]. В дальнейшем ограничимся случаем $\tilde{K}_{bc} > 0$. В динамическом режиме эта ситуация хорошо сохраняется при скоростях движения v , удовлетворяющих условию [22]

$$|c_1 - v|/v \gg (a_0/\delta_0)^2, \quad (3)$$

где c_1 – предельная скорость стационарного движения доменной границы вдоль \mathbf{a} -оси, равная минимальной скорости спиновых волн на линейном участке их закона дисперсии, δ_0 – характерный размер 360-градусной доменной стенки (ac) -типа, a_0 – постоянная решетки.

Используя функцию Лагранжа (1) – (2) и диссипативную функцию Рэлея

$$R = \frac{\alpha M_0}{2\gamma} \dot{\mathbf{l}}^2, \quad (4)$$

(α – параметр затухания Гильберта, M_0 – намагниченность насыщения магнитных подрешеток) и, переходя к угловым переменным $\mathbf{l} = l_0(\cos\theta, 0, \sin\theta)$, где $\theta = \theta(x, t)$ – угол между \mathbf{a} -осью кристалла и вектором \mathbf{l} в (ac) -плоскости, можно получить следующее уравнение, описывающее динамику одномерных магнитных неоднородностей, движущихся вдоль оси \mathbf{a} [3]:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 2h \sin(u/2) - \beta u_t. \quad (5)$$

В (5) были сделаны замены и переобозначения: $u = 2\theta$; $h = M_0 H / K_{ac}$ – безразмерное поле, K_{ac} – константа магнитной анизотропии; $\beta = \alpha M_0 / \sqrt{K_{ac} \chi_{\perp}}$ – безразмерный параметр затухания; $c_1 t / \delta_0 \rightarrow t$, $x / \delta_0 \rightarrow x$.

Следуя методу, предложенному в [3] можно получить одно из двух кинковых решений уравнения (5):

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{u}{4} = \frac{-(\Omega + \varepsilon^2)}{1 - \Omega} \operatorname{sh}^2(x\sqrt{1 - \Omega}), \quad (-\infty < \Omega < -\varepsilon^2). \quad (6)$$

Решение (6) удовлетворяет граничному условию:

$$u(x \rightarrow -\infty) = 0, \quad u(x \rightarrow +\infty) = 4\pi, \quad u_x(|x| \rightarrow \infty) = 0. \quad (7)$$

Параметры Ω и ε в (6) являются неизвестными функциями времени t и поля h . Зависимости $\Omega = \Omega(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ определяются из следующей системы уравнений [3]

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \Omega + \varepsilon^2 - \beta\varepsilon - h, \\ \Omega_t = \frac{2\varepsilon(h + \beta\varepsilon)}{1 + \varepsilon^2} \cdot (1 - \Omega) \cdot \left[1 + \frac{\Omega + \varepsilon^2}{2\sqrt{(1 - \Omega)(1 + \varepsilon^2)}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{1 - \Omega} + \sqrt{1 + \varepsilon^2})^2}{|\Omega + \varepsilon^2|} \right]. \end{cases} \quad (8)$$

Следует отметить, что условием того, что выражение (6) будет решением уравнения (5) является: $\Omega_t \ll 1$. Из второго уравнения системы (8) видно, что это условие справедливо при: $h \ll 1$ и $\beta \ll 1$.

Решение (6) соответствует одномерной 360-градусной доменной стенке. Как показано в [3] в постоянном поле h доменные стенки разной полярности с одинаковыми топологическими зарядами при сближении образуют 360-градусную стенку, в которой 180-градусные стенки могут совершать колебания относительно их общего центра.

3. Численные эксперименты по авторезонансному управлению колебаниями 360-градусной доменной стенки

Рассмотрим генерацию колебаний 180-градусных доменных стенок относительно центра образованной ими 360-градусной стенки, переменным полем $h(t)$, параллельным намагниченности в доменах

$$h = -h_0 - h_{10}(1 + pt) \sin \Phi(t), \quad (9)$$

где $h_0, h_{10} = \text{const}$, $0 < h_{10} \ll h_0$; p — параметр, характеризующий скорость изменения амплитуды переменного поля. В дальнейшем рассматривается случай

$$|\Omega + \varepsilon^2| \ll 1, \quad (\varepsilon^2 \ll 1, \quad |\Omega| \ll 1). \quad (10)$$

Полагая в (8)

$$\Omega = -h_{10}^{1/3} \rho \sin \psi - h_0, \quad \varepsilon = \frac{h_{10}^{1/3} \rho}{\sqrt{2h_0}} \cos \psi, \quad (11)$$

и, применяя классическую процедуру усреднения [25], получаем уравнения главного резонанса

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}(1 + ph_{10}^{-2/3}\tau) \sin \Psi - \frac{\lambda}{2} h_{10}^{-2/3} \rho, \\ \rho \left(\frac{d\Psi}{d\tau} - h_{10}^{-2/3} f(h_{10}^{-2/3} \cdot \tau) + \frac{3\rho^2}{16h_0} \right) = -\frac{1}{2}(1 + ph_{10}^{-2/3}\tau) \cos \Psi. \end{cases} \quad (12)$$

В (12) сделаны следующие замены и переобозначения: $\tau = t \cdot h_{10}^{2/3}$ — «медленное» время, $\lambda = \beta/\sqrt{2h_0}$ — перенормированный параметр затухания, $\Psi = \psi - \Phi$ — разность между фазой колебания параметров Ω, ε и фазой переменного поля. Функция $f(t)$ характеризует изменение частоты поля накачки со временем

$$\Phi_t = 1 - f(t) + h_0/2. \quad (13)$$

Анализ уравнений (12) позволяет выявить условия существования решений с неограниченно растущими амплитудами $\rho(\tau)$. Таким образом, найденные условия позволяют провести численный анализ уравнений (6) и (8) и описать генерацию нелинейных колебаний 180-градусных стенок относительно центра 360-градусной стенки. Генерацию таких колебаний удобно рассмотреть, наблюдая за изменением расстояния T между двумя сильно взаимодействующими 180-градусными стенками в 360-градусной доменной границе (ширины 360-градусной доменной границы):

$$T = \frac{2}{\sqrt{1 - \Omega}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{\Omega + \varepsilon^2}}. \quad (14)$$

Далее рассмотрим три различных случая модуляции частоты поля накачки: 1) $f(t) = vt$; 2) $f(t) = \mu \operatorname{th}(vt)$; 3) $f(t) = \mu \sin(vt)$. Здесь $v, \mu = \text{const}$.

В случае линейного закона изменения частоты поля накачки ($f(t) = vt$) величина T , как показывают решения уравнений (6) и (8), осциллирует со временем так, что амплитуда колебаний нарастает и в какой-то момент времени срывается на первоначальное значение (рис. 1). Выявление решений уравнений (6) и (8), для которых амплитуда колебаний ширины 360-градусной стенки достигает существенных значений по сравнению с начальной шириной, свидетельствует о захвате в авторезонанс.

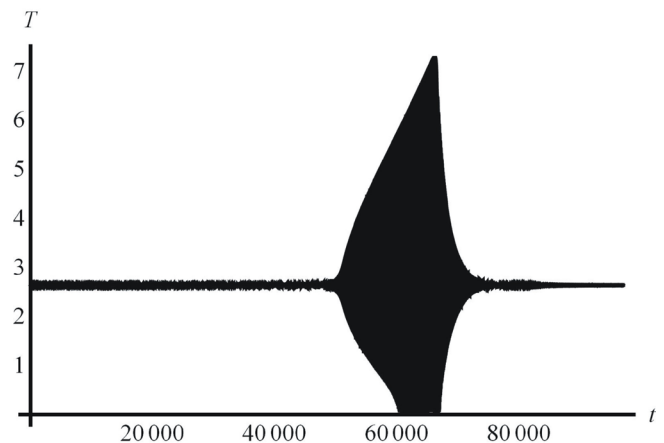


Рис. 1. Зависимость ширины 360-градусной доменной стенки от времени при $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\beta = 0.001$, $v = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t = 0) = -0.2$, $\varepsilon(t = 0) = 0$ для линейного случая модуляции частоты поля накачки $f(t) = vt$.

Fig. 1. The dependence of the width of the 360-degree domain wall from the time when $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\beta = 0.001$, $v = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t = 0) = -0.2$, $\varepsilon(t = 0) = 0$ for the linear case the modulation frequency of the pump field $f(t) = vt$.

В случае изменения частоты поля накачки по закону гиперболического тангенса ($f(t) = \mu \text{th}(\nu t)$), как показывают численные расчеты, систему можно перевести в высокоамплитудный стационарный режим колебаний ширины 360-градусной доменной стенки. Анализ показывает, что при данном значении остальных параметров системы (8) для параметра μ существует критическое значение μ_{cr} , ниже (рис. 2) и выше (рис. 3) которого картина колебаний ширины 360-градусной стенки разная. Если $\mu < \mu_{cr}$, то система переходит в высокоамплитудный стационарный режим пульсационных колебаний (рис. 2). Если же $\mu > \mu_{cr}$, то амплитуда колебаний ширины 360-градусной доменной стенки нарастает со временем вплоть, до момента, когда происходит ее срыв (рис. 3).

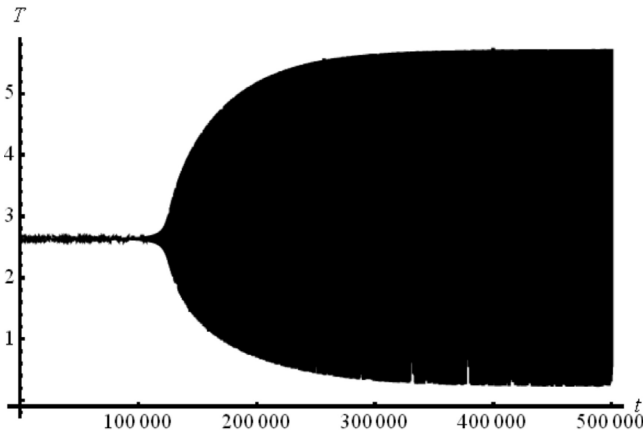


Рис. 2. Зависимость ширины 360-градусной доменной стенки от времени при $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\mu = 0.6 < \mu_{cr}$, $\beta = 0.001$, $\nu = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t=0) = -0.2$, $\varepsilon(t=0) = 0$ для гиперболического случая модуляции частоты поля накачки $f(t) = \mu \text{th}(\nu t)$.

Fig. 2. Dependence of the 360-degree domain wall width of the time when $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\mu = 0.6 < \mu_{cr}$, $\beta = 0.001$, $\nu = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t=0) = -0.2$, $\varepsilon(t=0) = 0$ for hyperbolic case the modulation frequency of the pump field $f(t) = \mu \text{th}(\nu t)$.

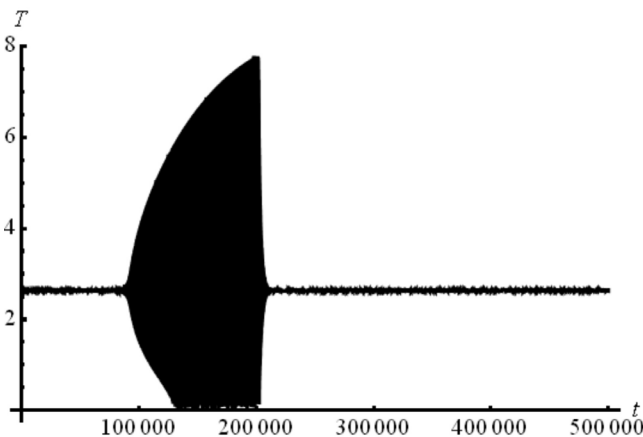


Рис. 3. Зависимость ширины (T) 360-градусной доменной стенки от времени при $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\mu = 0.7 > \mu_{cr}$, $\beta = 0.001$, $\nu = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t=0) = -0.2$, $\varepsilon(t=0) = 0$ для гиперболического случая модуляции частоты поля накачки $f(t) = \mu \text{th}(\nu t)$.

Fig. 3. Dependence of the width (T) 360-degree domain wall from the time when $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\mu = 0.7 > \mu_{cr}$, $\beta = 0.001$, $\nu = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t=0) = -0.2$, $\varepsilon(t=0) = 0$ for the hyperbolic case the modulation frequency of the pump field $f(t) = \mu \text{th}(\nu t)$.

Для случая гармонического изменения частоты поля накачки ($f(t) = \mu \sin(\nu t)$) результаты численного решения представлены на рис. 4, 5. Здесь также существует критическое значение параметра μ . При $\mu < \mu_{cr}$ со временем происходит периодическое плавное нарастание и убывание амплитуды колебаний ширины (T) 360-градусной доменной стенки (рис. 4). При $\mu > \mu_{cr}$ амплитуда колебаний величины T также периодически нарастает и убывает со временем, но при этом, наблюдается периодически срыв амплитуды колебаний ширины 360-градусной доменной стенки (рис. 5).

Отметим, что изменение h_0 существенным образом влияет на эволюцию 360-градусной доменной границы. Так, для линейного закона модуляции частоты поля на-

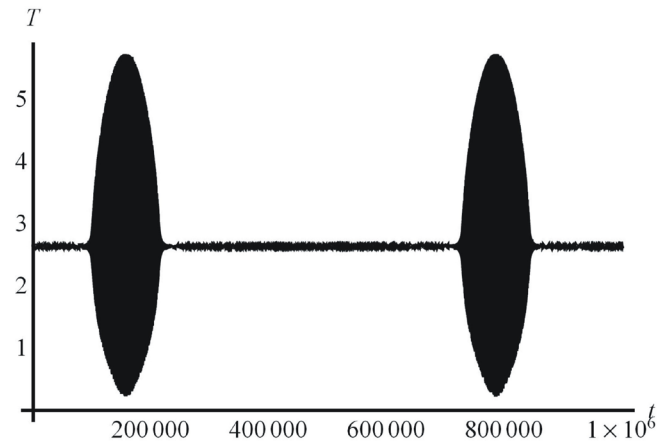


Рис. 4. Зависимость ширины (T) 360-градусной доменной стенки от времени при $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\mu = 0.6 < \mu_{cr}$, $\beta = 0.001$, $\nu = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t=0) = -0.2$, $\varepsilon(t=0) = 0$ для гармонического случая модуляции частоты поля накачки $f(t) = \mu \sin(\nu t)$.

Fig. 4. Dependence of the width (T) 360-degree domain wall from the time when $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\mu = 0.6 < \mu_{cr}$, $\beta = 0.001$, $\nu = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t=0) = -0.2$, $\varepsilon(t=0) = 0$ for the case of harmonic modulation frequency of the pump field $f(t) = \mu \sin(\nu t)$.

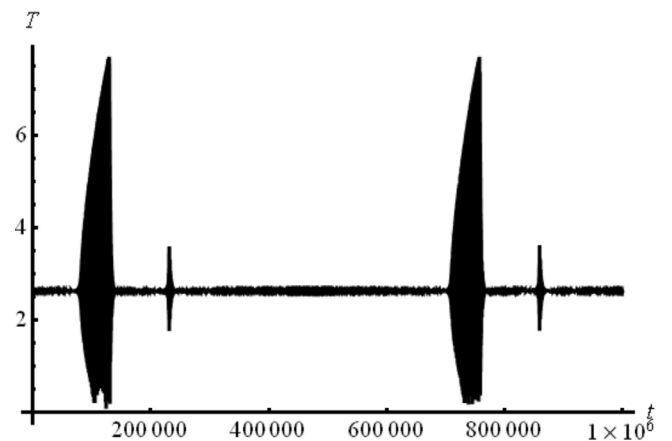


Рис. 5. Зависимость ширины (T) 360-градусной доменной стенки от времени при $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\mu = 0.7 > \mu_{cr}$, $\beta = 0.001$, $\nu = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t=0) = -0.2$, $\varepsilon(t=0) = 0$ для гармонического случая модуляции частоты поля накачки $f(t) = \mu \sin(\nu t)$.

Fig. 5. Dependence of the width (T) 360-degree domain wall from the time when $h_0 = 0.2$, $h_{10} = 0.001$, $\mu = 0.7 > \mu_{cr}$, $\beta = 0.001$, $\nu = 10^{-5}$, $p = 0$; $\Omega(t=0) = -0.2$, $\varepsilon(t=0) = 0$ for the case of harmonic modulation frequency of the pump field $f(t) = \mu \sin(\nu t)$.

качки: уменьшение h_0 приводит к смещению момента срыва амплитуды колебаний ширины 360-градусной доменной стенки в сторону больших времен, при этом амплитуда колебаний T возрастает. В случае гиперболического и гармонического закона модуляции частоты поля накачки - при увеличении h_0 уменьшается величина μ_{cr} . Кроме того, при уменьшении параметра ν период колебаний переменных $\rho(\tau)$ и $\Psi(\tau)$ для всех трех случаев увеличивается.

Таким образом, выбирая тип модуляции частоты поля накачки, а также меняя параметры поля накачки, систему можно перевести в необходимый режим колебаний, т.е. эффективно управлять динамикой 360-градусной доменной стенки в режиме авторезонанса.

4. Заключение

В рамках двухподрешеточной модели антиферромагнетика было получено уравнение, описывающее эволюцию магнитных неоднородностей в слабых ферромагнетиках. Анализ решения этого уравнения, которое представляет собой двухсолитонное образование и соответствует 360-градусной доменной границе, образованной двумя сильно взаимодействующими 180-градусными стенками, показал возможность генерации переменным полем малой амплитуды в режиме авторезонанса высокоамплитудных колебаний ширины 360-градусной доменной границы. Показано, что форма установившихся нелинейных колебаний ширины 360-градусной доменной границы определяется видом функции, задающей модуляцию частоты поля накачки. Динамическая стабильность и полное управление колебаниями могут быть достигнуты модулированием частоты поля накачки.

Литература/References

1. M. A. Shamsutdinov, E. S. Shikhovtseva, I. Yu. Lomakina. The Phys. Metals and Metallogr. **95** (1), 84–88 (2003).
2. I. Yu. Lomakina, M. A. Shamsutdinov, E. S. Shikhovtseva. Bulletin of the Bashkir University. **1**, 19 (2003). (in Russian) [И.Ю. Ломакина, М.А. Шамсутдинов, Е.С. Шиховцева. Вестник Башкирского университета. **1**, 19 (2003).]
3. M. A. Shamsutdinov, I. Yu. Lomakina, V. N. Nazarov, et al. Ferro- and Antiferromagnetodynamics. Nonlinear Oscillations, Waves, and Solitons. Moscow, Nauka. (2009) 456 p. (in Russian) [М.А. Шамсутдинов, И.Ю. Ломакина, В.Н. Назаров и др. Ферро- и антиферромагнетодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. Москва, Наука. 2009. 456 с]
4. A. B. Borisov, V. V. Kiselev. Nonlinear Waves, Solitons, and Localized Structures in Magnetism, Vol. 2, Topological Solitons, Two-dimensional and Three-Dimensional Knots. Ekaterinburg, Ural Branch, Russ. Acad. Sci. (2011) 416 p. (in Russian) [А.Б. Борисов, В.В. Киселев. Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 2. Топологические солитоны, двумерные и трехмерные “узоры”. Екатеринбург: УрО РАН. 2011. 416 с]
5. A. P. Tankeev, M. A. Borich, V. V. Smagin. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. **74** (10), 1403 (2010). (in Russian) [А.П. Танкеев, М.А. Борич, В.В. Смагин. Известия РАН. Серия физическая. **74** (10), 1403 (2010).]
6. B. N. Filippov, M. N. Dubovik, L. G. Korzunin. The Physics of Metals and Metallography. **112** (4), 351 (2011). (in Russian) [Б.Н. Филиппов, М.Н. Дубовик, Л.Г. Корзунин. ФММ. **112** (4), 351 (2011).]
7. E. G. Galkina, B. A. Ivanov. Low Temperature Physics. **33** (5), 601 (2007). (in Russian) [Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов. Физика низких температур. **33** (5), 601 (2007).]
8. A. S. Kovalev, J. E. Prilepsky, A. A. Peretyat'ko. Low Temperature Physics. **34** (12), 1294 (2008). (in Russian) [А.С. Ковалев, Я.Е. Прилепский, А.А. Перетят'ко. Физика низких температур. **34** (12), 1294 (2008).]
9. M. A. Shamsutdinov, A. P. Tankeev, I. R. Kayumov. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. **71** (1), 1503 (2007). (in Russian) [М.А. Шамсутдинов, А.П. Танкеев, И.Р. Каюмов. Известия РАН. Серия физическая. **71** (1), 1548 (2007).]
10. M. A. Shamsutdinov, A. P. Tankeev, I. R. Kayumov. The Physics of Metals and Metallography. **111** (1), 25 (2011). (in Russian) [М.А. Шамсутдинов, А.П. Танкеев, И.Р. Каюмов. ФММ. **111** (1), 27 (2011).]
11. E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov. Letters on materials. **4** (4), 237 (2014). (in Russian) [Е.Г. Екомасов, А.М. Гумеров. Письма о материалах. **4** (4), 237 (2014).]
12. K. P. Belov, A. K. Zvezdin, A. M. Kadomtseva, and R. Z. Levitin. Spin-Reorientation Transitions in Rare-Earth Magnets. Moscow, Nauka. (1981) 318 p. (in Russian) [К.П. Белов, А.К. Звездин, А.М. Кадомцева, Р.З. Левитин. Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках. Москва, Наука. 1979. 318 с]
13. B. Meerson, L. Friedland. Phys. Rev. A. **41**, 5233 (1990).
14. L. A. Kalyakin. Russian Mathematical Surveys. **63** (5), 3 (2008). (in Russian) [Л.А. Калякин. УМН. **63** (5), 3 (2008).], Doi: 10.4213/rm9237
15. R. N. Garifullin. Reports of the Russian Academy of Sciences. **398** (3), 306 (2004). (in Russian) [Р.Н. Гарифуллин. Доклады РАН. **398** (3), 306 (2004).]
16. J. Fajans, E. Gilson, and L. Friedland. Phys. of Plasmas. **8**, 423 (2001).
17. R. N. Garifullin, L. A. Kalyakin, M. A. Shamsutdinov. Computational Mathematics and Mathematical Physics. **47** (7), 1158 (2007). (in Russian) [Р.Н. Гарифуллин, Л.А. Калякин, М.А. Шамсутдинов. Ж. вычисл. и матем. физ. **47** (7), 1208 (2007).]
18. M. A. Shamsutdinov, L. A. Kalyakin, A. T. Kharisov. Technical Physics. **55** (6), 860 (2010). (in Russian) [М.А. Шамсутдинов, Л.А. Калякин, А.Т. Харисов. ЖТФ. **80** (6), 106 (2010).]
19. M. A. Shamsutdinov, L. A. Kalyakin, A. L. Sukhonosov, A. A. Khalfina. The Physics of Metals and Metallography. **108** (1), 8 (2009). (in Russian) [М.А. Шамсутдинов, Л.А. Калякин, А.Л. Сухоносов, А.А. Халфина. ФММ. **108** (1), 10 (2009).]
20. S. V. Batalov, A. G. Shagalov. The Physics of Metals and Metallography. **109**, 1 (2010). (in Russian) [С.В. Баталов, А.Г. Шагалов. ФММ. **109** (1), 3 (2010).]

21. E.A. Turov, A.V. Kolchanov, V.V. Men'shenin, et. al. Symmetry and Physical Properties of Antiferromagnets. Moscow, Fizmatlit. (2001) 560 p. (in Russian) [Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин и др. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков. Москва, Физматлит. 2001. 560 с]
22. V.G. Bar'yakhtar, B.A. Ivanov, and A.L. Sukstanskii. Zh. Eksp. Teor. Fiz. **78** (4), 1509 (1980). (in Russian) [В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, А.Л. Сукстанский. ЖЭТФ. **78** (4), 1509 (1980).]
23. A.K. Zvezdin. Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29** (10), 605 (1979) (in Russian) [А.К. Звездин. Письма в ЖЭТФ. **29** (10), 605 (1979).]
24. M.M. Farztdinov. Physics of Magnetic Domains in Antiferromagnets and Ferrites. Moscow, Nauka. (1981) 156 p. (in Russian) [М.М. Фарзтдинов. Физика магнитных доменов в антиферромагнетиках и ферритах. Москва, Наука. 1981. 156 с]
25. N.N. Bogolyubov, Yu.A. Mitropolsky. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow, Nauka. (1974) 504 p. (in Russian) [Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, Наука. 1974, 504 с]